

חומרים שהוכנו על-ידי משתתפי קורס מורים מובילים תשע"ה

ניתן להשתמש בחומרים לצורך הוראה בלבד.

לא ניתן לפרסם את החומרים או לעשות בהם כל שימוש מסחרי

ללא קבלת אישור מראש מצוות הפיתוח

כתיבה ועריכה:

יוסי זהבי, ישראל אברמוביץ

מאגר מעבדות לשפות התכנות החדשות

מעבדה תחילה

רקורסיה

מבוא והיכרות בסיסית

מאת : יוסי זהבי וישראל אברמוביץ
במסגרת קורס מורים מובילים של מרכז המורים הארצי למדעי המחשב בהנהלת ובהנחיית
ד"ר תמי לפידות.

המעבדה מיועדת לשיעורי המעבדה והיא מבוססת על שיטת ההוראה לפיה הלימוד של כל
נושא חדש יפתח בהתנסות אישית במעבדה. לאחריה, יבוא דיון כיתתי, שבעקבותיו יפתרו
משימות שונות.

המעבדה בקובץ זה מיועדת לתלמידים הלומדים מדעי המחשב בשפת התכנות C# והיא
מותאמת לסביבת Visual Studio.

תרגיל 1

מבקר במפעל מסוים אמור לחשב את סה"כ הוצאות השכר החודשיות במפעל, הוא מגלה שיש 8 דרגות במקום העבודה. כל עובד מדורג מ A, העובד הכי בכיר, עד H העובדים הכי זוטרים.

העובדים באו אל המבקר בסדר **מהבכירים עד לזוטרים** כאשר הוא שאל מהי הדרגה והמשכורת של העובד העובד ענה את דרגתו ולא ענה מה משכורתו אלא אמר שמשכורתו גדולה ב 100 ש"ח מהעובדים שבדרגה אחת נמוכה יותר.

א. האם בדרך זו יכול המבקר לדעת מה סה"כ הוצאות השכר החודשיות של המפעל?

ב. אנה הסבר תשובתך:

בעקבות התנהלות העובדים ניתנה הוראה לעשות זאת שוב באותו הסדר, והפעם יש לומר למבקר את המשכורת. אולם, רק העובדים הזוטרים (בדרגה H) צייתו להוראה (כל השאר ענו בדיוק כמו בפעם הראשונה).

ג. האם הפעם יכול המבקר לדעת מה הן הוצאות השכר החודשיות בכל המפעל ?

ד. אנה הסבר תשובתך

ה. כפי שבוודאי ענית, הפעם יש למבקר את היכולת לחשב את הוצאות השכר. האם תוכל לומר באיזה שלב זה קרה ? (באיזה שלב במהלך התישאול השני יש למבקר את היכולת לחשב את כל הוצאות השכר במפעל)

ו. הסבר כיצד המבקר יחשב את הוצאות השכר אם רק דרגה H אומרת את משכורתה ?

ז. האם יש דרך לחשב את משכורת המנהל הראשי (דרגה A) לפני שמחשבים את כל הדרגות שמתחתיו ? מדוע ?

תרגיל 2

התבונן בשלושת התרשימים הבאים :

A.

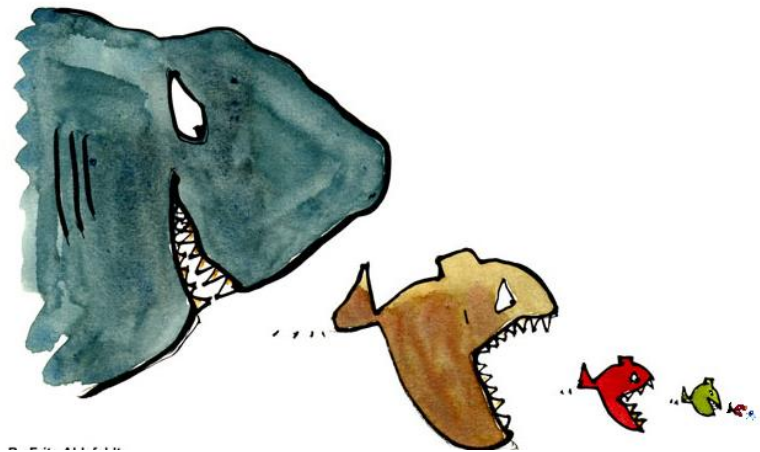


B.



יש בית קטן ירוק
ובבית הקטן הירוק
יש בית קטן חום
ובבית הקטן החום
יש בית קטן צהוב
ובבית הקטן הצהוב
יש בית קטן לבן
ובבית הקטן הלבן
יש לב קטן אדום,
מלא אהבה וחום.

C.



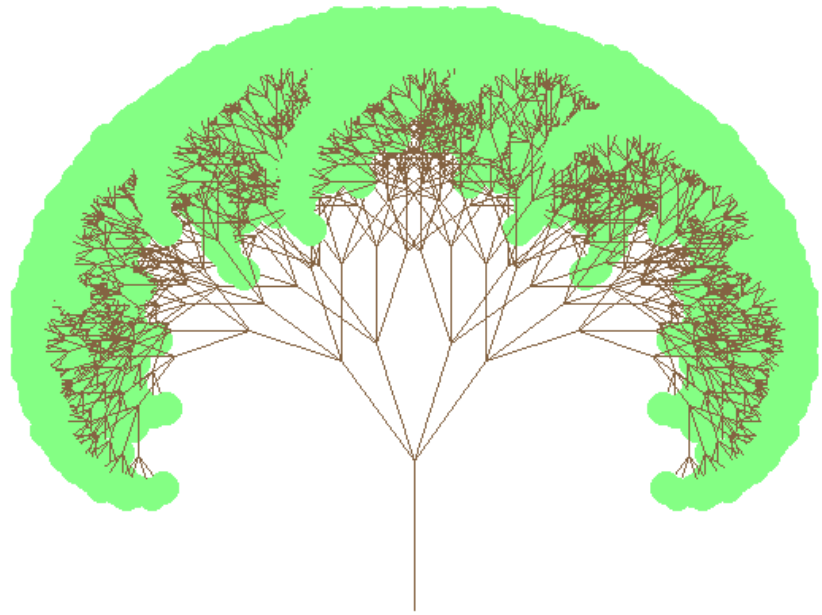
א. תן שם לקבוצה שישקף את המשותף לשלושת התרשימים.

ב. כתוב תיאור לקבוצה :

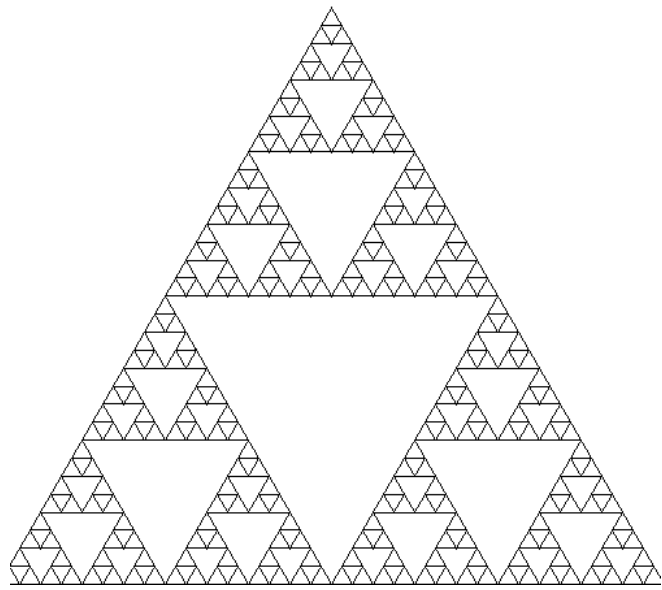
ג. נסה להוסיף עוד 2 פריטים המתאימים לקבוצה.

תרגיל 3

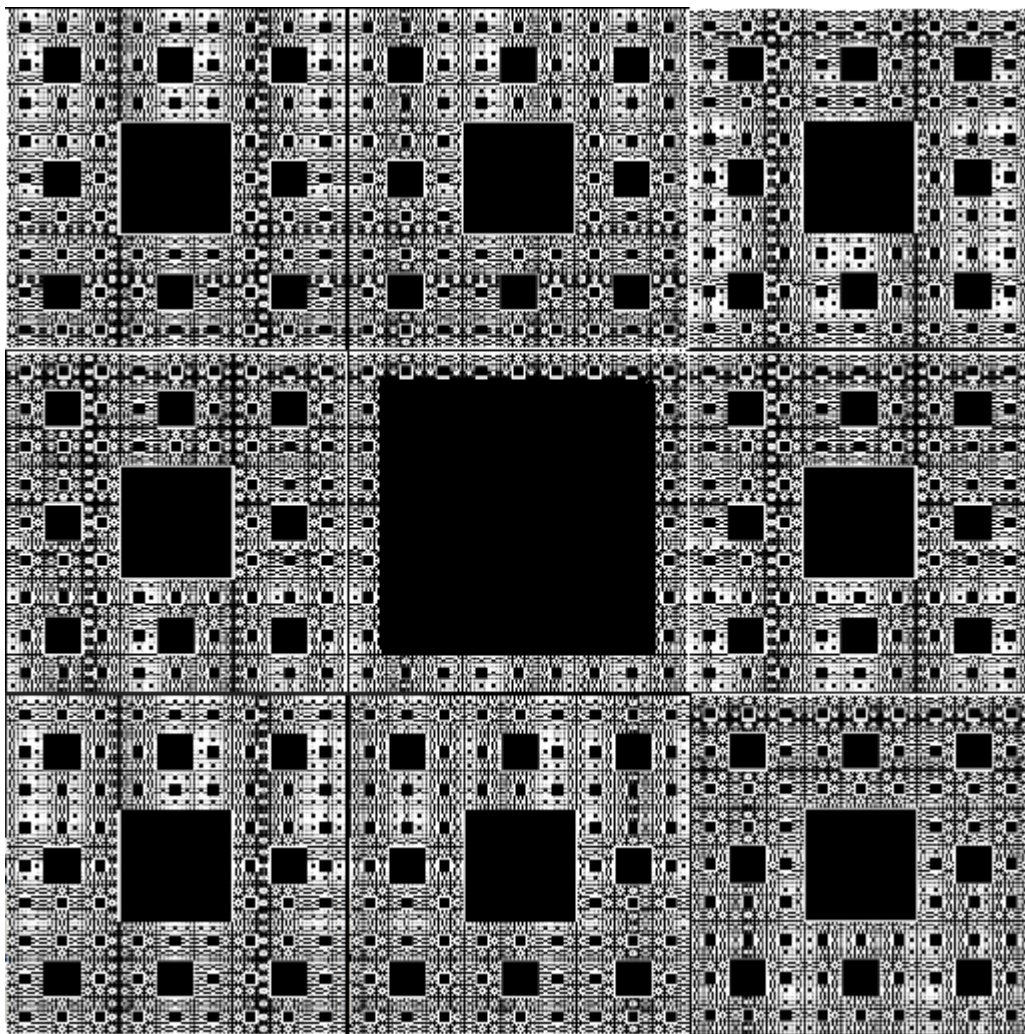
התבונן בשלושת הצורות הבאות :
A.



.B



.C



א. תן שם לקבוצה שישקף את המשותף לשלושתם.

ב. כתוב תיאור לקבוצה :

ג. נסה להוסיף עוד פריט או שניים המתאימים לקבוצה.

תרגיל 4.

קרא את שלושת המשפטים הבאים:

A. מיהו יהודי? כל מי שאימו יהודיה.

B. לשוק ההייטק יכול להיכנס רק מי שיש לו ניסיון בהייטק

C. היה היה אדם נדיב מאד שנתן את כל כספו לעניים עד שלא נותר לו אוכל ומת. באו כל העניים ובנו לו מצבה ועל המצבה הם כתבו: היה היה אדם נדיב מאד שנתן את כל כספו לעניים עד שלא נותר לו אוכל ומת. באו כל העניים ובנו לו מצבה ועל המצבה הם כתבו: היה היה אדם נדיב מאד שנתן את כל כספו לעניים עד שלא נותר לו אוכל ומת. באו כל העניים ובנו לו מצבה ועל המצבה הם כתבו: היה היה אדם נדיב מאד שנתן את כל כספו לעניים עד שלא נותר לו אוכל ומת. באו כל העניים ובנו לו מצבה ועל המצבה הם כתבו: היה היה אדם נדיב מאד שנתן את כל כספו לעניים עד שלא נותר לו אוכל ומת. באו כל העניים ובנו לו מצבה ועל המצבה הם כתבו: היה היה אדם נדיב מאד שנתן את כל כספו לעניים עד שלא נותר לו אוכל ומת. באו כל העניים ובנו לו מצבה ועל המצבה הם כתבו:

א. תן שם לקבוצה שישקף את המשותף לכולם.

ב. כתוב תיאור לקבוצה :

ג. נסה להוסיף עוד 2 משפטים המתאימים לקבוצה.

סיכום ארבעת התרגילים .

בארבעת התרגילים ראינו תופעות שמופע שלהם חוזר שוב ושוב. לפעמים קטן יותר, לפעמים גדול יותר ולפעמים אותו גודל ואין סופי. לתופעה כזו אנו קוראים רקורסיה. בתחום מדעי המחשב ניתן לבנות פעולות רקורסיביות העוזרות לנו להתמודד עם תופעות אלו.

הבה נבחן שלוש הגדרות שיעזרו לנו בהמשך :

הגדרת הרקורסיה - רקורסיה היא תופעה שכל מופע שלה מכיל מופע נוסף שלה, כך שהיא מתרחשת ומשתקפת בשלמותה בתוך עצמה שוב ושוב.

הגדרה רקורסיבית - היא הגדרת מושג באופן שמצריך פניה אל אותה הגדרה אבל בתנאים שונים. לרוב, כדי לא להיגרר לרקורסיה אינסופית הגדרה רקורסיבית תכלול גם תנאי עצירה.

אלגוריתם רקורסיבי - אלגוריתם רקורסיבי הפותר בעיה מורכבת מפעיל את עצמו על מופע פשוט יותר של הבעיה שוב ושוב עד שהיא ניתנת לפתרון באופן פשוט (ישיר).

ניתן לזהות 4 אלמנטים החוזרים על עצמם באלגוריתם רקורסיבי הפותר בעיה. (שאינו אין סופי)

1. מקרה פשוט (תנאי עצירה)
2. מקרה מורכב
3. התכנסות מן המקרה המורכב אל המקרה הפשוט.
4. קריאה רקורסיבית - כלומר הפעלה של הפעולה שוב ושוב

דוגמה:

ננסה לזהות את ארבעת המרכיבים האלו בתרגיל הראשון על המבקר והעובדים שענו שמשכורתם 100 ש"ח יותר ממעובד שהינו בדרגה הנמוכה להם (פרט לדרגה H שאמרו את משכורתם ישירות).

1. מקרה פשוט - משכורת של דרגה H
2. מקרה מורכב - משכורת של כל עובד שהוא לא בדרגה H .
3. התכנסות- כל עובד אומר שמשכורת נמוכה מהמשכורת של העובד בדרגה אחת נמוכה יותר כך שבסוף נגיע בהכרח לעובד בדרגה H.
4. קריאה רקורסיבית - משכורת של X שווה למשכורת של $Y + 100$.

בתרגיל הבא נתנסה בפתרון רקורסיבי וננסה לזהות את ארבעת המרכיבים.

תרגיל 5.

א. המורה מבקש ממך לפתור את התרגיל 6 כפול 5 כיצד תפתור אותו כאשר אינך יכול להשתמש בפעולת הכפל עצמה .

ב. אם לא הצלחת האם תצליח לבצע זאת ע"י ביצוע של פעולות חיבור ? _____
כיצד ?

ענה ננסה לפתור זאת בצורה רקורסיבית.
אם נדע מהו הפתרון של 6 כפול 4 האם נוכל לפתור את 6 כפול 5 באמצעות חיבור ? _____
כיצד ?

אבל מהו הפתרון של 6 כפול 4 ? אם נדע את 6 כפול 3 האם נוכל ? _____ כן / לא
אבל מהו הפתרון של 6 כפול 3 ? אם נדע את 6 כפול 2 האם נוכל ? _____ כן / לא
אבל מהו הפתרון של 6 כפול 2 ? אם נדע את 6 כפול 1 האם נוכל ? _____ כן / לא
כאן נעצור.. אנו יודעים בוודאות שכל מספר כפול 1 הוא המספר עצמו (המספר פעם אחת)
את זה אין צורך לבקש ממישהו שיעשה זאת בישבילי.
האם גילינו דרך לפתור את 6 כפול 5 באמצעות אלגוריתם רקורסיבי ? _____
ננסה לזהות בתרגיל שעשינו את 4 המרכיבים שתיארנו קודם

הסבר מהו המקרה הפשוט : _____
הסבר מהו המקרה המורכב : _____
הסבר מהי ההתכנסות: _____
הסבר מהי הקריאה הרקורסיבית החוזרת על עצמה שוב ושוב.

ענה נבנה לבעיה אלגוריתם רקורסיבי .

אלגוריתם לכפל של X כפול P פעמים.

שם הפעולה: "בצע כפל של (המספר X , P פעמים)".
אם P שווה 1

החזר כתשובה את X.

אחרת

החזר כתשובה את X + "בצע כפל של (המספר X , P - 1 פעמים)".

המר את האלגוריתם לפעולה והרץ . אם לא הצלחת הפתרון במסגרת בכתב בצבע לבן

בחן את האלגוריתם . (האם זה עובד גם במקרי קצה , 0 , מספרים שליליים אם לא תקן)
מה יקרה אם P יהיה שלילי ? מדוע ?

האלגוריתם הרקורסיבי מנצל תכונה מיוחדת במחשב המסוגלת לבצע פעולה בתוך פעולה
תוך שמירה על ההקשר הנכון בכל אחת מהקריאות לפעולה.

כאן גם המקום לציין שהמחשב משתמש במשאבי הזיכרון (מחסנית המחשב) בכל פעם
שישנה קריאה לפעולה . כמובן שאם הרקורסיה היא אין סופית המחשב יגיע למגבלת
המשאבים שלו ויקרוס. לכן
א. חשוב לבנות פתרון המתכנס בוודאות אל המקרה הפשוט (ולדוגמה , לא מדלג עליו)
ב. חשוב להבין שלפעמים אין מספיק משאבים למחשב כדי לפתור בעיה מסויימת.

תרגיל 6 - עצרת

נגדיר עתה עצרת factorial (מסומנת בסימן !)

עצרת של מספר X היא תוצאת הכפל של כל המספרים השלמים מ 1 עד ל X
לדוגמה עצרת של המספר 5 היא $120 = 5*4*3*2*1$

אקסיומה : עצרת של 1 היא 1 וגם עצרת של 0 היא 1.

ניתן להגדיר עצרת בצורה רקורסיבית:

נסה להגדיר

לאחר שהגדרת שנה את צבע השורה שבמסגרת הבאה לשחור כדי לבחון את תשובתך:

על פי ההגדרה הרקורסיבית ניתן לכתוב פעולת מחשב המחשבת את העצרת בצורה
רקורסיבית

השלם את הפעולה הרקורסיבית הבאה המחזירה את ערך העצרת של X.

```
static void Main(string[] args)
{
```

```

int fact = Factorial(6);
Console.WriteLine(" The Factorial of 6 is :" + fact);
}

```

```

public static int Factorial(int x)
{
    if (_____ || _____)
        return _____;

    return _____ * _____ (_____);
}

```

לאחר השלמת הפעולה מצא וכתוב את 4 האלמנטים הקיימים בכל אלגוריתם רקורסיבי

_____ : הסבר מהו המקרה הפשוט

_____ : הסבר מהו המקרה המורכב

_____ : הסבר מהי ההתכנסות

_____ : הסבר מהי הקריאה הרקורסיבית החוזרת על עצמה שוב ושוב.

נא בדוק וכתוב מה הערך החוזר מהערכים הבאים 0, 1, 4, 6, 10, 12, 13, 17, ו 40

Factorial(0) = ___?___

Factorial(1) = ___?___

Factorial(4) = ___?___

Factorial(6) = ___?___

Factorial(10) = ___?___

Factorial(12) = ___?___

Factorial(13) = ___?___

Factorial(17) = ___?___

Factorial(40) = ___?___

מדוע לדעתך קיבלת ערך לא נכון ב 13 ו 17 ו 40 (השווה במחשבון).

הורד את שתי השורות הראשונות בפעולה Factorial כך שתישאר שורה אחת בלבד בפעולה. הרץ. מה קרה? מדוע?

כיצד כותבים פעולה רקורסיבית. "טיפ"
כאשר אתה מזהה שיש פתרון רקורסיבי לבעיה (לרוב בגלל ההגדרה הרקורסיבית של הבעיה) הדרך לכתוב את הפתרון הרקורסיבי היא:
(1) מצא את תנאי העצירה ופתור אותו (די פשוט)
(2) אמור לעצמך "קשה לי למצוא את f של X "
אבל אם אדע כמה זה f של "קרוב של X " אעשה P ואז אפתור את f של X "
בדרך כלל משפט זה יעזור לך לבנות את הפתרון הרקורסיבי המורכב. P מציין פעולה התלויה בבעיה עצמה (לדוגמה בעצרת זה היה הכפול).

תרגיל 7 חזקה

ניתן להגדיר רקורסיבית את פעולה החזקה כך:

חזקה של X במעריך Y היא: X כפול " X בחזקת המעריך (Y פחות 1)"

א. כתוב אלגוריתם רקורסיבי לפעולת החזקה.

ב. כתוב פעולה רקורסיבית על סמך האלגוריתם - הרץ ובדוק.

תרגיל 8 - הדפסת מספר במהופך

המטרה להדפיס מספר בצורה הפוכה לדוגמה את המספר 2015 להדפיס כך: 5102

ניתן להגדיר את הפתרון בעזרת האלגוריתם הרקורסיבי הבא.

פעולת "הדפס במהופך את X "

אם יש רק ספרה אחת הדפס אותה אם לא הדפס את ספרת האחדות וקרא לפעולה "הדפס במהופך את X " עם X מחולק בעשר (כלומר ללא ספרת האחדות שכבר הודפסה)

_____ : הסבר מהו המקרה הפשוט

_____ : הסבר מהו המקרה המורכב

_____ : הסבר מהי ההתכנסות:

הסבר מהי הקריאה הרקורסיבית החוזרת על עצמה שוב ושוב.

פסאודו קוד:

הדפס-במהופך (n)
אם $n < 10$, הדפס את n
אחרת: הדפס את $n \% 10$ (השארית של חלוקת n ב-10)
זמן את הדפס-במהופך $(n/10)$

לפניך חלק מהפתרון, השלם את הפעולה :

```
public static void ReverseNum(int n)
{
    if ( תנאי עצירה )
        Console.Write( __ );
    else
    {
        Console.Write(n%10);
        ReverseNum( עבר תנאי העצירה );
    }
}
```

הרץ ובדוק.

תרגיל 9 פיבונאצ'י

מתוך ויקיפדיה :

סדרת פיבונאצ'י קרויה על שם לאונרדו מפיזה הידוע בכינוי "פיבונאצ'י".
פיבונאצ'י השתמש בסדרה כדי לתאר את מספר הצאצאים של זוג ארנבים אחד, אם מניחים שכל זוג ארנבים שהגיע לגיל חודשיים, ממליט מדי חודש זוג נוסף. באוכלוסייה כזו, מספר זוגות הארנבים בחודש ה-n יהיה שווה ל- F_n .
למעט הסדרות החשבוניות וההנדסיות, ושילובים שלהן, סדרת פיבונאצ'י היא הדוגמה הפשוטה ביותר לסדרה המוגדרת ברקורסיה.
למספרי פיבונאצ'י יש תכונות רבות ומעניינות. ספרים שלמים נכתבו עליהם ואף קיים כתב עת מתמטי (Fibonacci quarterly) שמוקדש כולו לתגליות במספרי פיבונאצ'י והכללות שלהם. כמו כן, נוסדה אגודת פיבונאצ'י שמטרתה לגלות מופעים חדשים של סדרת פיבונאצ'י.

נגדיר עתה איבר בסדרה - איבר בסדרת פיבונאצ'י הינו סכום של שני האיברים הקודמים לו בסדרה.

אקסיומה : האיבר הראשון בסדרה הינו 1 והשני הנו גם 1.

לדוגמה האיבר השישי בסדרה הינו 8
(עשרת האיברים הראשונים בסדרה 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55)

A. כיצד נבנה אלגוריתם רקורסיבי המחזיר את ערך האיבר ה X בסדרה ?
(למי שנתקל בקשיים יש עזרה ב סעיף C.)

_____ : הסבר מהו המקרה הפשוט
_____ : הסבר מהו המקרה המורכב
_____ : הסבר מהי ההתכנסות:
_____ : הסבר מהי הקריאה הרקורסיבית החוזרת על עצמה שוב ושוב.

B. בנה פעולה בשם Fibonacci . הרץ ובדוק בלולאה את עשרת האיברים הראשונים.

C. אם לא הצלחת, נסה בדרך הבאה . אמור " איני יודע מהו האיבר ה n של פיבונאצ'י אבל אם אדע את האיבר ה n פחות אחד של פיבונאצ'י וגם את האיבר ה n פחות שתיים של פיבונאצ'י אחבר בניהם וזאת התוצאה"
כלומר פיבונאצ'י n הינו חיבור בין פיבונאצ'י $n-1$ ופיבונאצ'י $n-2$.

D. האם מבנה הרקורסיה דומה לפעולות שלמדת בתרגילים הקודמים
מה דומה ?

E. מה שונה ?

סוגי רקורסיות.

ישנם כמה סוגי רקורסיה

1. רקורסיית זנב. - רקורסיה היורדת לעומק מקסימלי ואז חוזרות בחזרה . ישנה רק קריאה רקורסיבית אחת בגוף הפעולה. (רקורסיות כמו חזקה, עצרת, כפל, הדפס במהופך שלמדנו)

2. רקורסיה מרובה - ברקורסיה מרובה ישנה יותר מקריאה אחת רקורסיבית בגוף הפעולה.

3. רקורסיה הדדית - רקורסיה בה פעולה לא קוראת לעצמה אלא לפעולה אחרת שבתוכה יש קריאה לפעולה הראשונה.

F. מצא את סוג הקריאה הרקורסיבית בתרגיל פיבונאצ'י (תרגיל 9)

תרגיל 10. רקורסיה במחרוזות - האם מחרוזת היא פולינדרום.

במחרוזות לרוב נבצע קריאה רקורסיבית עם מחרוזות קרובות (יותר גדולות או יותר קטנות) עד להגעה למקרה הקצה..

לפניך פעולה המקבלת מחרוזת ומחזירה 'אמת' אם המחרוזת הנתונה היא פולינדרום, ו-'שקר' אחרת. פולינדרום מוגדר כך שהחצי הימני של המחרוזת הינו תמונת מראה של החצי השמאלי.

לדוגמה פולינדרום בעל מספר אי זוגי של תווים "dcdamadcd"

```
public static bool Palindrome (string str)
{
    if (str.Length <= 1)
        return true;
    if (str[0] != str[str.Length - 1])
        return false;
    return Palindrome (str.Substring(1, str.Length - 2));
}
```

בתרגיל זה עליך לדבג . Debug
 נא שים נקודת עצירה בשורה הראשונה של הפעולה ובדוק את ערכו של str בכל פעם שמגיעים לשורה זו. קרא לפעולה עם הערך שבדוגמה "dcdamadcd"

עליך למלא את הטבלה הבאה

מספר הכניסה לפעולה	ערכו של str	ערך חוזר true/false
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		

מדוע כמות הכניסות אינה קרובה לאורך המחרוזת ?
 נסה לנסח כמה פעמים הפעולה תקרא לעצמה

בצע זאת שוב עם המחרוזת "abcdbba"

מספר הכניסה לפעולה	ערכו של str	ערך חוזר true/false
1		

		2
		3
		4
		5
		6
		7

הרץ שוב עם מחרזת ריקה , מחרזת באורך באורך אחד , ומחרזת באורך זוגי.
ורשום מסקנותיך לגבי כל הרצה.

1. _____
2. _____
3. _____

תרגיל 11. רקורסיה במערכים - מציאת ערך מקסימאלי.

ברקורסיה במערכים לרוב נשלח אינדקסים low ו high או begin ו end כפרמטרים לרקורסיה כדי להתייחס לתת מערך בכל פעם.

המשימה :עליך למצוא את האיבר המקסימלי במערך שאיבריו הינם בסדר אקראי ולא ממוין.

עליך לבצע זאת באמצעות קריאה רקורסיבית מרובה על פי הרעיון הבא:
האיבר הכי גדול במערך הינו האיבר הגדול יותר מבין האיבר המקסימלי בכל חצי מערך (תת מערך).

המקרה הפשוט - "אם אורך תת המערך שווה 1 האיבר הינו המקסימאלי"

המקרה המורכב (נא השלם) - חלק את המערך לשניים וקרא לפעולה שוב עם שני החצאים.
כשתקבל את שני הערכים הגבוהים שבכל חצי בצע _____
והחזר את _____.

השלם את החסר בפעולה

```
public static int FindMax (int[] arr, int begin, int end)
{
    if (begin == end)
        return arr[begin];
    else
    {
        int middle = (begin + end) / 2;
        int max1 = FindMax (arr, begin, middle);
        int max2 = FindMax (arr, middle+1, end);
        if ( _____ )
```

```

        return max1;
    return max2;
    }
}

```

הרץ ובדוק.
 כיצד תתבצע הקריאה הראשונה

```
Console.WriteLine(FindMax(arr,0,arr.Length -1));
```

לבסוף הוסף את השורה הבאה בשורה הראשונה של הפעולה (לפני ה if)

```
Console.WriteLine("begin=" + begin + " end=" + end );
```

כמה פעמים תודפס שורה זו ? מדוע ?

בדוק.

תרגיל 12 - המחשת חוזקה של הרקורסיה

עד כה למדנו רקורסיות פשוטות שברוב המקרים ניתן לפתור אותן גם בפיתרון איטראטיבי (באמצעות לולאה) וברוב המקרים הפתרון יהיה יותר זול במונחים של זמן תכנות, זמן ביצוע וצריכת משאבי זיכרון.
 אם כן מדוע המבנה המפותל של הרקורסיה עוזר לנו?

לבעיות שהגדרתן היא רקורסבית, לרוב, ניתן לבנות פתרון הרבה יותר פשוט והרבה יותר מהיר ברקורסיה מאשר פתרון בלולאה.

בתרגיל מסכם זה ננסה להראות כיצד פתרון רקורסיבי הינו אינטואיטיבי וקל עשרות מונים על פני פתרון בלולאות.

תרגיל כמה מדליות יש בבמשפחה

נתון המערך M המכיל N שורות ושלוש עמודות

```
int [ , ] M = { {-1 ,4,-1} // 0
               {-1, 5 , -1}, // 1
               { 8 , 2 , 1 }, // 2
               { 4 , 1 , -1}, // 3

```

$\{-1, 8, -1\}$, // 4
 $\{7, 3, -1\}$, // 5
 $\{2, 8, 4\}$, // 6
 $\{-1, 6, -1\}$, // 7
 $\{10, 2, 5\}$, // 8
 $\{-1, 2, -1\}$ // 9
 $\{-1, 0, -1\}$ // 10

};

המערך מייצג את כמות המדליות שצברו אנשים שונים בתחרויות שונות וברמות שונות: סבים, אבות, בנים, נכדים, נינים וכו' לכל רמה יכולים להיות עד שני בנים. הערך בעמודה המרכזית (אינדקס 1) מייצג את כמות המדליות שצבר בן משפחה מסויים ואילו הערכים בעמודות 0 ו 2 מציינים את השורות במערך בהם נמצאים הבנים של אותה רמה. (לשם הנוחות נקרא להם בן שמאלי ובן ימני) לדוגמה, אם ראש המשפחה הוא בשורה 6 הוא צבר בחייו 8 מדליות ושני בניו נמצאים בשורות 4 ו 2. הערך 1- מציין שלרמה זו אין בן (כלומר אין רמה נמוכה יותר לדוגמה לשורה 5 יש רק בן שמאלי אחד בשורה 7). המשימה : חשב את סכום המדליות שצבר ראש המשפחה (בשורה אינדקס 6) יחד עם כל צאצאיו בכל הרמות. שים לב לא כל השורות "שייכות" למשפחה המתחילה בשורה 6. לדוגמה שורה 9 .

א. נסה לפתור בעיה זו בדרך הרגילה (לא רקורסיבית) במשך כמה דקות.
 ב. בהנחה שלא הצלחת או שהיה קשה נסה לבנות פתרון רקורסיבי עזרה :

הסבר מהו המקרה הפשוט : _____
 הסבר מהו המקרה המורכב : _____
 הסבר מהי ההתכנסות: _____
 הסבר מהי הקריאה הרקורסיבית החוזרת על עצמה שוב ושוב. _____

אלגוריתם רקורסיבי הפותר את הבעיה.

שם הפעולה : "סכום מדליות של שורה X"
 אם הגענו לשורה 1-
 החזר 0
 אחרת

החזר את הערך של השורה הנוכחית ועוד הקריאה ל "סכום מדליות של שורה שרשומה בתא 0" (בן שמאלי) ועוד "סכום מדליות של שורה שרשומה בתא 1" (בן ימני)

כתוב את הפעולה הרץ ובודק.

הפתרון במסגרת באותיות בצבע לבן

