

מודלים מנטליים של רקורסיה: איך לומדים מבינים רקורסיה?

Mental Models of Recursion: Investigating Students'

Understanding of Recursion

Tamarisk Scholtz & Ian Sanders

המאמר השלם ניתן להורדה בכתובת:

<http://db.grinnell.edu/sigcse/iticse2010/Program/viewAcceptedProposal.asp?sessionType=paper&sessionNumber=29>

הוצג בכנס ITiCSE שהתקיים באנקרה טורקיה 2010

למרות שמודלים מנטליים של רקורסיה יכולים ללמד אותנו על ההבנה של לומדים, הטענה המרכזית במאמר היא שמודל המעקב¹ לא יכול להצביע על הבנה אמיתית ומעמיקה של רקורסיה. מחברי המאמר ערכו מחקר שנועד לבדוק יותר לעומק מה מבינים לומדים על רקורסיה. הם בחרו סטודנטים שהיו להם מודלים יציבים למעקב ובדקו את ההבנה שלהם בנושא העצירה של פונקציה רקורסיבית, ניתוח המודלים התיאוריים של הסטודנטים (איך הם מתארים במילים את תהליך הביצוע הרקורסיבי) ואת יכולתם לבנות פונקציות רקורסיביות. המחקר מספק ראיות לכך ששיטות מעקב אמנם מאפשרות לסטודנטים לבצע את התהליך המכני ולגלות מעט הבנה אבל המחקר מצא שלמרות זאת הסטודנטים לא מבינים רקורסיה לעומק, ובמיוחד יש להם קשיים בהבנת זרימה פסיבית². בהתבסס על הממצאים של המחקר, המאמר דן בהשלכות אפשריות על הוראת רקורסיה.

הקדמה

כאשר סטודנטים מפגינים יכולת לבצע מעקב אחר פונקציה רקורסיבית ויש להם מודל מנטלי יציב של מעקב (trace mental model) ניתן לחשוב שהסטודנטים האלה אכן מבינים רקורסיה. אבל מחברי המאמר טוענים שהסטודנטים רק למדו לשלוט בתהליך המכני של ביצוע מעקב אחר אלגוריתם רקורסיבי ובפועל הם לא מבינים רקורסיה כהלכה. כדי לבדוק את הטענה הזו, הם ערכו מחקר שנועד לבדוק את הבנת הרקורסיה של סטודנטים בעלי מודלים מנטליים יציבים של מעקב. מקובל לחשוב על מודל ההעתקים³ (copies mental model) כמודל יציב של רקורסיה כיוון שסטודנטים שיש להם המודל הזה מפגינים הבנה בזרימה אקטיבית. אבל Kahney הזהיר כבר בעבר שמודל ההעתקים לא מספיק כדי לקבוע האם סטודנט מבין רקורסיה וטען שסטודנטים יכולים לנבא את ההתנהגות של הפונקציה הרקורסיבית מבלי להבין רקורסיה כהלכה.

1. מודל מעקב (tracing model) הוא מודל שמתמקד במעקב אחר התהליך הנוצר על ידי פונקציות רקורסיביות, כלומר במעקב איך פועלות הפונקציות הללו. על מודלים מנטליים נוספים של רקורסיה אפשר לקרוא באתר המרכז הארצי, בסקר הספרות על רקורסיה http://cse.proj.ac.il/literature/recursion_preface.htm
2. במאמר יש שימוש בשני מושגים: זרימה אקטיבית (active flow of control) וזרימה פסיבית (passive flow) של רקורסיה. זרימה אקטיבית מתארת את השלב של הקריאה הרקורסיבית (כניסה למחסנית) ואילו זרימה פסיבית מתארת את שלב החזרה מהקריאה הרקורסיבית (יציאה מהמחסנית). המינוח זרימה אקטיבית נבחר כי בשלב הביצוע של הקריאה הרקורסיבית צריך לציין במפורש מה מבצעת התכנית. המינוח זרימה פסיבית נבחר כי בשלב החזרה מהקריאה הרקורסיבית לא צריך לציין לאן עוברת הבקרה (זה נעשה באופן אוטומטי).
3. מודל ההעתקים הוא מודל קונספטואלי המגדיר רקורסיה כתהליך שביכולתו להפעיל עותקים חדשים של עצמו, ואשר מסוגל להעביר את הבקרה אל ומהעותק המופעל.

בדיקת ההבנה של רקורסיה על ידי סטודנטים

המחקר התקיים באוניברסיטת Witwatersrand בדרום אפריקה (Wits) בשנת 2009. בשלב הראשון, נערך מחקר ל- 123 הסטודנטים שהשתתפו בקורס של השנה הראשונה (קורס שהתבסס על שפת פייטון) והם קיבלו מבחן שבדק את יכולתם בביצוע מעקב. במבחן היו 3 שאלות של עיבוד רשימות שהיה צריך לבצע בהן מעקב של פונקציות רקורסיביות, להוכיח האם פונקציה רקורסיבית עוצרת ולתאר בכתב את הביצוע של פונקציות רקורסיביות. השאלות האלה בדקו האם הסטודנטים מבינים שפונקציה רקורסיבית מגיעה למקרה הקצה (limiting case) ואז היא משלימה את הזרימה הפסיבית לפני שהיא מסיימת את הביצוע. עורכי המחקר ניסו לזהות מודלים מנטליים של רקורסיה מתוך ההוכחות של הסטודנטים (לעצירת הפונקציות הרקורסיביות) ומתוך התיאורים שלהם לביצוע של הפונקציות.

בשלב השני, נבחרו מתוך הקבוצה הזו 15 סטודנטים שהיה להם מודל מנטלי יציב למעקב ונערך להם ראיון. במסגרת הראיון, הם קיבלו שתי משימות: במשימה אחת היה עליהם לבצע מעקב אחר אלגוריתם שמצייר צורה גרפית ובמשימה השנייה הם התבקשו לתכנן אלגוריתם להדפסת תבנית גרפית אחרת. כל סטודנט קיבל ציון על תשובותיו לפי ההבנה שלו בתחום של זרימה אקטיבית, מקרי קצה, וזרימה פסיבית וכן חושב הציון המשולב של כל סטודנט. בנוסף, כל התשובות נותחו כדי לאתר מודלים של מעקב.

שאלה 3 מתוך המבחן הראשון שנערך לכל הסטודנטים:

```
Algorithm1 (List) :
  if List is empty :
    return 1
  else :
    return Algorithm2 ( head (List)) + Algorithm1 ( tail (List))

Algorithm2 (n) :
  if n=0
    return 1
  else :
    return 2 * Algorithm2 (n-1)
```

שאלות הראיון שנערכו ל- 15 סטודנטים:

שאלה שנייה: (תכנון אלגוריתם)	שאלה ראשונה: (מה מתבצע?)
<pre>* * * * * * * * * * * * * * *</pre>	<pre>Draw (n, dist): if n==0: return else: Draw (n-1, dist-10) turtle.forward (dist) turtle.left (90) turtle.forward (dist)</pre>

ממצאי המחקר

בעקבות השלב הראשון של המחקר נמצאו מודלים של מעקב ל-3 השאלות (של עיבוד רשימות). כ-50% מהסטודנטים הצליחו ליצור מודל מעקב יציב לשאלה הראשונה והשנייה אבל רק בודדים (פחות מ-20%) הצליחו ליצור מודל מעקב יציב לשאלה השלישית.

בנוסף, נמצא שהסטודנטים מתקשים לתת הוכחות כפי שהתבקשו והסתבר שלא ניתן לזהות מודלים מתוך ההוכחות שלהם.

התיאורים של הסטודנטים לאלגוריתם Algorithm1 בשאלה 3 (ראה עמוד קודם) סווגו לפי זיהוי של זרימה אקטיבית, מקרי קצה, וזרימה פסיבית. כאשר סטודנט הצליח לתאר את כל שלושת המקרים קבעו עורכי המחקר שיש לו מודל מנטלי תיאורי של העתקים. רק 9 סטודנטים היו מסוגלים לתאר נכון את הביצוע של האלגוריתם. סטודנט שלא הפגין הבנה בכל שלושת המקרים (על פי התיאורים הכתובים שלו) סווג כבעל מודל מקרי (odd).

לביצוע השלב השני של המחקר נבחרו 15 סטודנטים. אף אחד מהם לא הכיר שיטות מעקב לפני לימודיו באוניברסיטה. ניתוח הממצאים חשף שרק שני סטודנטים הפגינו הבנה מלאה של רקורסיה והצליחו לפתור את שתי השאלות. 7 סטודנטים אחרים הפגינו הבנה דלה (המראיין היה צריך לעזור להם בפתרון הבעיות). התוצאות האלה מוכיחות את הטענה של Kahney ששליטה במודל העתקים לא מבטיחה בהכרח הבנה מלאה של רקורסיה. ממצאי המחקר הוכיחו באופן חד משמעי שרוב הסטודנטים לא מבינים את המנגנון של זרימה פסיבית.

שימוש במודלים של מעקב

שיטות מעקב הן כלי חיוני בהוראת רקורסיה כיוון שהן מספקות לסטודנטים אמצעים מכניים למעקב אחר ביצוע של אלגוריתם רקורסיבי. השיטות האלה אמורות לאפשר לסטודנטים להבין את המנגנון של זרימה אקטיבית, טיפול במקרה קצה, וזרימה פסיבית כי הם עוקבים במפורש אחר ביצוע האלגוריתם.

תוצאות המחקר מצביעות על כך של-66 סטודנטים היה מודל מקרי והם לא הפגינו הבנה באף אחת מהשאלות. ניתוח נוסף חשף של-54 מהם היה לפחות פתרון מעקב נכון אחד ול-32 מהם היה לפחות מודל העתקים יציב אחד. העובדה הזו מוכיחה שרבים מהסטודנטים יכולים לעקוב אחר ביצוע רקורסיבי אבל הם לא מסוגלים לתאר את הביצוע הזה במילים. המסקנה המתבקשת, לפי מחברי המאמר, היא שאין להם הבנה מעמיקה של רקורסיה.

מלכתחילה הוחלט שבראיון לא יתנו לסטודנטים לבצע מעקב. אבל במהלך הראיונות, היו סטודנטים שהתקשו להבין את האלגוריתם הראשון $Draw(n, dist)$ ולכן הם הורשו לבצע מעקב. הסתבר ש-12 מתוך 15 הסטודנטים היו צריכים לבצע מעקב לפני שהצליחו להבין מה מבצע האלגוריתם. הסטודנטים האלה הרגישו נוח בביצוע המעקב והם הסתמכו עליו כדי להבין מה קורה אבל הם לא יכלו להסביר מה מבצע האלגוריתם ללא ביצוע מפורש של מעקב. לפיכך, ניתן להסיק שאין להם תחושה אמיתית של רקורסיה.

הממצאים האלה מצביעים על כך שהוראת שיטות מעקב יכולה לסייע לסטודנטים ולכן היא נקודת פתיחה טובה להבנת רקורסיה אבל נדרש הרבה יותר מכך כדי לפתח הבנה יציבה של רקורסיה.

השלכות להוראה

הסטודנטים שהשתתפו במחקר מקבלים הזדמנויות רבות לתרגול של מעקב אחר פונקציות רקורסיביות. הם למדו לעקוב אחר קריאות רקורסיביות ולייצר את המודל ההעתיקים. אבל תוצאות המחקר הראו שאין בכך די. לטענת מחברי המאמר, הבעיה העיקרית היא שכל הדוגמאות שהוצגו לסטודנטים היו דוגמאות מתימטיות פשוטות שקל לפתור אותן עם שיטות מעקב. ולכן, הם טוענים שצריך להדגים לסטודנטים מגוון גדול יותר של בעיות רקורסיביות, החל מבעיות מתימטיות פשוטות ועד לפונקציות גרפיות מורכבות יותר.

כמו כן, צריך להקדיש בהוראת רקורסיה תשומת לב להסברת המנגנון של זרימה פסיבית כיוון שלסטודנטים קשה להבין את המנגנון הזה והם נוטים לחשוב שהפונקציה עוצרת כאשר היא נתקלת במקרה הקצה (ולא ממשיכה לבצע את ההוראות שלאחר החזרה מהקריאה הרקורסיבית). ראיות לכך נמצאו בראיונות כאשר הסטודנטים לא הצליחו לבצע את אלגוריתם Draw. בנוסף, ממליצים מחברי המאמר להדגיש בצורה ברורה את ההבדלים בין רקורסיה ולולאות.

המלצה נוספת של מחברי המאמר היא לתת לסטודנטים מגוון של תרגילים לפיתוח של פונקציות רקורסיביות. באוניברסיטת Witwatersrand הסטודנטים תרגלו במעבדה פיתוח של פונקציות מתימטיות בלבד ולכן הם התקשו בביצוע המשימות שהוצגו להם במהלך המחקר. באופן מיוחד, ממליצים מחברי המאמר להדגים לסטודנטים פונקציות רקורסיביות מקוננות שיש בהן הוראות שצריכות להתבצע אחרי הקריאה הרקורסיבית.