

החומרים שלפניכם הוכנו על-ידי מורים מובילים שהשתתפו בקורס תשס"ג, בהנחיית ד"ר מיכל ארמוני מהאוניברסיטה הפתוחה. ניתן להשתמש בחומרים לצורך הוראה אבל אסור לעשות בהם כל שימוש מסחרי ללא קבלת אישור מראש מהמחברים.

ניתוח מכונות טיורינג נתונות

שאלה 1 (איריס ברגורי + דורון זוהר)

לפניך תיאור של מכונות טיורינג בעלת שישה מצבים, כאשר q_5 המצב המקבל היחיד. א"ב הקלט הוא $\{0,1\}$.

(ימין, $q_0, 0, q_1, 0$)

(ימין, $q_0, 1, q_2, 1$)

(שמאל, q_0, Δ, q_4, Δ)

(ימין, $q_1, 0, q_1, 0$)

(ימין, $q_1, 1, q_2, 1$)

(שמאל, q_1, Δ, q_5, Δ)

(ימין, $q_2, 0, q_3, 0$)

(ימין, $q_2, 1, q_1, 1$)

(שמאל, q_2, Δ, q_4, Δ)

(ימין, $q_3, 0, q_2, 0$)

(ימין, $q_3, 1, q_3, 1$)

(שמאל, q_3, Δ, q_4, Δ)

(ימין, $q_4, 0, q_4, 0$)

(ימין, $q_4, 1, q_4, 1$)

(ימין, q_4, Δ, q_4, Δ)

א. הראה מסלולי חישוב של המכונה על המילים 101101 ו-1010101.

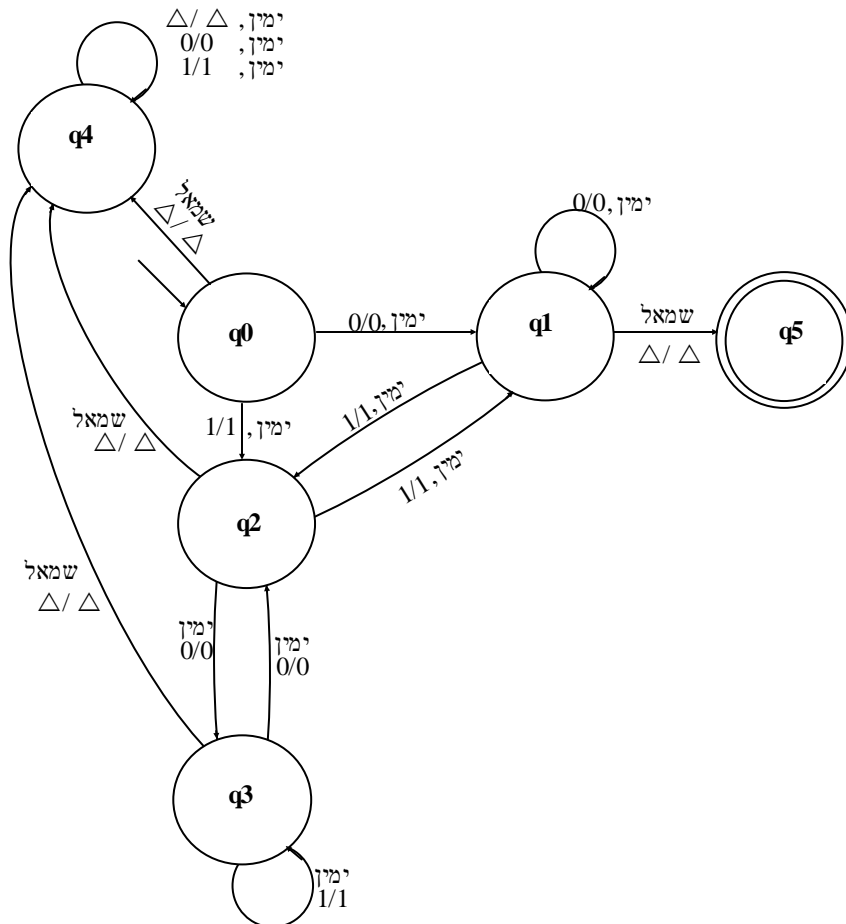
ב. אילו מילים מתקבלות על ידי המכונה?

ג. מצא דוגמא למילה (שאינה אף אחת מהמילים מסעיף א') עליה המכונה לא עוצרת, וקבע מהי קבוצת כל המילים עליהן המכונה לא עוצרת.

ד. תקן את המכונה כך שתעצור תמיד.

פתרון

לעיתים קל יותר לנתח מכונה נתונה כאשר מעבירים אותה לייצוג גרפי. במקרה זה, הייצוג הגרפי המתאים הוא:



ניתן לראות שמכונה זו מבצעת סריקה אחת של הקלט וזוכרת תוך כדי הסריקה, בעזרת המצבים, איפיונים של הקלט שקראה. עם סיום קריאת המילה (כלומר קריאת Δ ראשון) היא מקבלת החלטה – לקבל (לעבור ל- q_5) או לדחות (לעבור ל- q_4). הקלט עצמו כלל לא משתנה תוך כדי הסריקה, ולכן בעצם מכונה זו עוברת כמו אוטומט סופי.

אלו תפקידי המצבים:

q_0 – מצב התחלתי.

q_1 – זוכר שקטע הקלט שנקרא עד כה מייצג מספר בינארי (בבסיס 2) המתחלק ב-3.

q_2 – זוכר שקטע הקלט שנקרא עד כה מייצג מספר בינארי שחלוקתו ב-3 משאירה שארית 1.

q_3 – זוכר שקטע הקלט שנקרא עד כה מייצג מספר בינארי שחלוקתו ב-3 משאירה שארית 2.

q_4 – הסתיימה קריאת הקלט ונקרא בינארי שאינו מתחלק ב-3.

q_5 – הסתיימה קריאת הקלט ונקרא מספר בינארי המחלק ב-3.

א. לא נתאר מסלולי חישוב מלאים. מאחר שהמכונה אינה משנה את הקלט מספיק לומר שעבור המילה הראשונה – 101101 – היא עוצרת במצב המקבל q_5 ועבור המילה השניה היא נכנסת ללולאה אינסופית ב- q_4 ולכן דוחה את המילה.

ב. המכונה מקבלת את כל המילים שמייצגות מספר בינארי המתחלק ב-3.

ג. דוגמה נוספת למילה שהמכונה אינה עוצרת עליה: 10. המכונה אינה עוצרת על מילים המייצגות מספר בינארי שאינו מתחלק ב-3.

ד. ניתן לבטל את המצב q_4 וכל המעברים אליו, או לבטל את הלולאה העצמית במצב q_4 .

שאלה 2 (איריס ברגורי)

מה מבצעת המכונה הבאה, אשר א"ב הקלט שלה הוא $\{0,1\}$ ו- q_1 מצב מקבל? מכונה זו אינה משתמשת במוסכמות הפלט שבספר הלימוד אלא במוסכמה אחרת, לפיה הפלט הוא כל מה שרשום על הסרט עם העצירה.

(ימין, $q_0, 0, q_0, 1$)

(ימין, $q_0, 1, q_0, 0$)

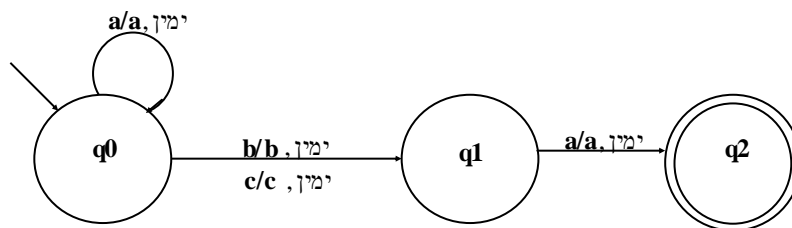
(שמאל, q_0, Δ, q_1, Δ)

פתרון

המכונה מקבלת קלט מילה מעל הא"ב $\{0,1\}$ ומוציאה כפלט את המילה המתקבלת משינוי כל 0 ל-1 ומשינוי כל 1 ל-0.

שאלה 3 (ויקטוריה צורי)

לפניך מכונת טיורינג:



א. איזו שפה מתקבלת ע"י המכונה? נמק את תשובתך.

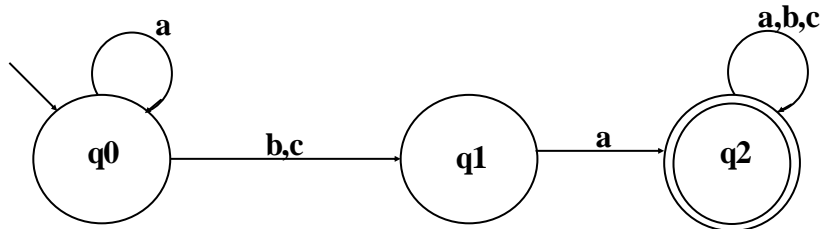
ב. האם שפה זו רגולרית? חופשית הקשר שאינה רגולרית? אינה חופשית הקשר? נמק את תשובתך.

פתרון

זאת שאלה קלה מאוד, שמתאימה לעבודת כיתה, שיעורי בית או בחינה.

א. המכונה מקבלת את שפת כל המילים שמכילות את הרצף ba או את הרצף ca.

ב. זו שפה רגולרית כי ניתן לבנות אוטומט סופי שמקבל אותה.

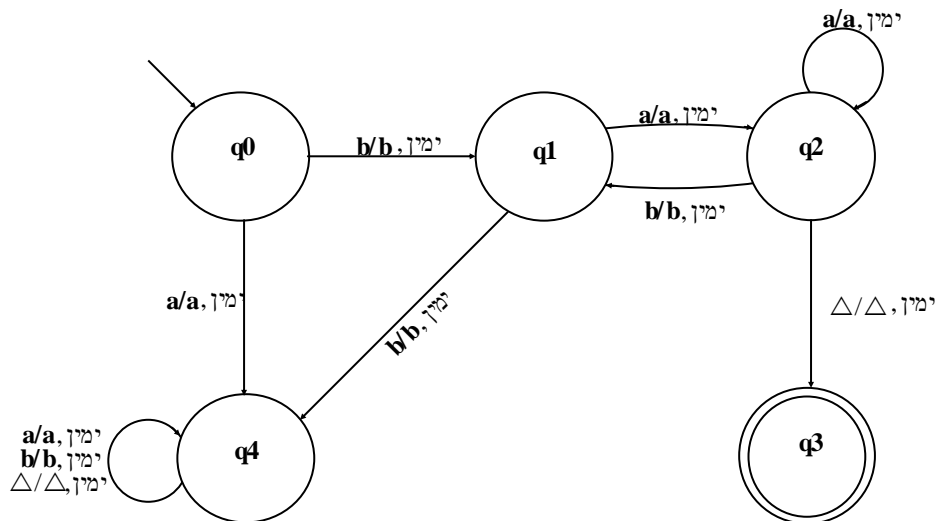


קל לראות זאת משום שמכונה זו סורקת את הקלט פעם אחת בלבד ולא משנה בו כלום ולכן עובדת בעצם כמו אוטומט סופי (פרט לכך שמותר לה להיתקע ועדיין לקבל את המילה ולכן אינה חייבת לקרוא אותה עד סופה).

כדאי להראות את ההקבלה בין המכונה לאוטומט. ההקבלה מחזקת את ההבדלים בהגדרות המודלים – באוטומט סופי היתקעות משמעה בהכרח דחייה, ואילו מכונת טיורינג תמיד נתקעת כי הסרט אינסופי, ואין זה אומר שאינה יכולה לקבל מילים.

שאלה 4 (ויקטוריה צורי)

לפניך מכונת טיורינג:



א. מהי השפה שמתקבלת ע"י המכונה?

ב. מהי קבוצת המילים מעל הא"ב {a,b} שעבורן המכונה לא עוצרת?

ג. שנה את המכונה, כך שתקבל אותן מילים, אך תעצור על כל מילת קלט.

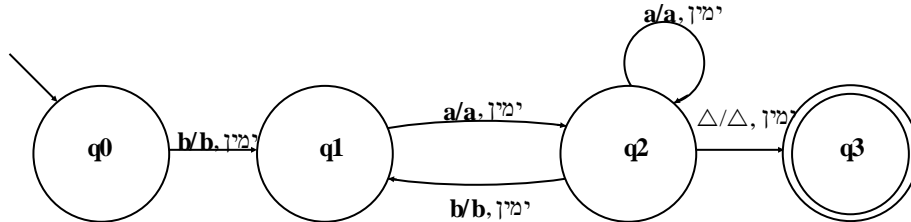
ד. האם השפה שמקבלת המכונה רגולרית, חופשית הקשר שאינה רגולרית, אינה חופשית הקשר? נמק

את תשובתך.

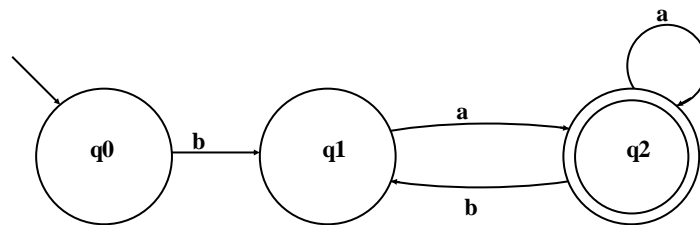
פתרון

א. המכונה מקבלת את כל המילים מעל הא"ב $\{a,b\}$ שמתחילות ב-b, מסתיימות ב-a ואינן מכילות את הרצף bb.

ב. המכונה לא עוצרת עבור כל המילים שמתחילות ב-a או מכילות את הרצף bb. ניתן להוריד את המצב q_4 וכל המעברים המובילים אליו. מתקבלת המכונה



ד. השפה היא רגולרית ואוטומט סופי שמקבל אותה דומה מאוד למכונה שבסעיף ג':



גם במקרה זה כמו בשאלה 3 כדאי לדון בהקבלה בין המכונה שבסעיף ג' לאוטומט הסופי ובכך לחדד את ההבדלים בין המודלים.

שאלה 5 (ריקה רם)

נתונה מכונת טיורינג הבאה:

א"ב הקלט $\{a,b,c\}$. א"ב המכונה ריק. קבוצת המצבים היא $\{q_0, q_1, q_2\}$. q_0 המצב ההתחלתי. המצב המקבל הוא q_2 . המכונה עובדת לפי מוסכמת פלט שונה מזו שמקובלת בספר הלימוד: הפלט הוא כל מה שרשום על הסרט עם עצירת המכונה.

- (q_0, a, q_0, a , ימין)
- (q_0, b, q_0, b , ימין)
- (q_0, c, q_0, c , ימין)
- (q_0, Δ, q_1, Δ , שמאל)
- (q_1, a, q_2, a , שמאל)
- (q_1, b, q_2, c , שמאל)
- (q_1, c, q_2, b , שמאל)
- (q_2, a, q_2, a , שמאל)
- (q_2, b, q_2, c , שמאל)
- (q_2, c, q_2, b , שמאל)

א. מהו הפלט של המכונה על מילות הקלט $aaa, bbb, abbc$?

ב. מה מבצעת המכונה?

ג. שנה את המכונה כך שתמחק כל מילה המסתיימת ב-a.

פתרון

א. על aaa הפלט הוא aaa . על bbb הפלט הוא ccc . על $abbc$ הפלט הוא $accb$.

ב. מחליפה כל b ב- c וכל c ב- b .

ג. יש להוסיף מצבים נוספים: q_3 – זוכר כי האות האחרונה שנקראה היא a . q_4 – מצב מחיקה.

את המעבר הראשון נבטל ונוסיף את המעברים הבאים:

(q_0, a, q_3, a , ימין)

(q_3, a, q_3, a , ימין)

(q_3, b, q_0, b , ימין)

(q_3, c, q_0, c , ימין)

(q_3, Δ, q_4, Δ , שמאל)

(q_4, a, q_4, Δ , שמאל)

(q_4, b, q_4, Δ , שמאל)

(q_4, c, q_4, Δ , שמאל)

q_4 יהיה גם הוא מצב מקבל.

שאלה 6 (ריקה רם)

נתונה מכונת טיורינג הבאה:

א"ב הקלט $\{a, b\}$. א"ב המכונה ריק. קבוצת המצבים היא $\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$. המצב ההתחלתי הוא

q_0 והמצב המקבל הוא q_3 . זו קבוצת המעברים:

(q_0, a, q_1, a , ימין)

(q_0, b, q_4, b , ימין)

(q_0, Δ, q_0, Δ , ימין)

(q_1, b, q_2, b , ימין)

(q_1, a, q_4, a , ימין)

(q_2, a, q_3, a , ימין)

(q_2, b, q_4, b , ימין)

(q_4, a, q_4, a , ימין)

(q_4, b, q_4, b , ימין)

(q_4, Δ, q_4, Δ , ימין)

(ימין, q_3, a, q_1, a)

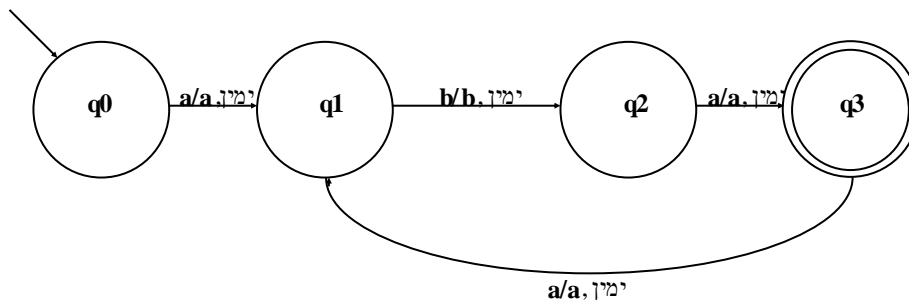
(שמאל, q_3, b, q_5, Δ)

(שמאל, q_5, a, q_0, a)

- א. לפניכם המילים $abbaba, abaaba, babb$. קבעו עבור כל מילה אם היא מתקבלת על ידי המכונה.
ב. מהי השפה שמקבלת המכונה?
ג. האם המכונה עוצרת על כל מילת קלט? אם כן – הסבירו. אם לא – הראו על אילו מילים אינה עוצרת ובנו מכונה שתקבל אותה שפה ותעצור על כל מילת קלט.

פתרון

- א. $babb$ לא מתקבלת (המכונה נכנסת לחישוב אינסופי).
 $abaaba$ מתקבלת.
 $abbaba$ לא מתקבלת (המכונה נכנסת לחישוב אינסופי).
ב. המכונה מקבלת את השפה $\{(aba)^n \mid n > 0\}$.
ג. המכונה לא עוצרת על המילה הריקה (בגלל הלולאה ב- q_0). המכונה לא עוצרת כאשר היא מוצאת אות שאינה עקבית עם רצף aba תורן (בגלל המעברים ל- q_4 והלולאה ב- q_4 ובגלל המעבר מ- q_3 ל- q_5 ומ- q_5 ל- q_0 תוך כדי חזרה שמאלה ומ- q_0 ל- q_4 והלולאה ב- q_4).
המכונה עוצרת ולא מקבלת מילים מהצורה $(aba)^i a$ או $(aba)^i ab$ ($i \geq 0$).
כדי לקבל אותה שפה ולעצור על כל מילת קלט יש לבטל את q_4 והמעברים אליו, את הלולאה ב- q_0 ואת q_5 והמעברים הנוגעים בו. נישאר עם המכונה הפשוטה הבאה:



כמובן, מספיק גם לבטל רק את הלולאות ב- q_0 וב- q_4 .

שאלה 7 (אתי מנשה)

נתונה מכונת טיורינג המחשבת פונקציה מספרית. המכונה מקבלת כקלט שני מספרים שלמים חיוביים הכתובים באונרית ונותנת כפלט מספר הכתוב גם כן באונרית, עפ"י מוסכמות הכתיבה המתוארות בספר הלימוד.
אלו מעברי המכונה.

(ימין, $q_0, 1, q_1, 0$)

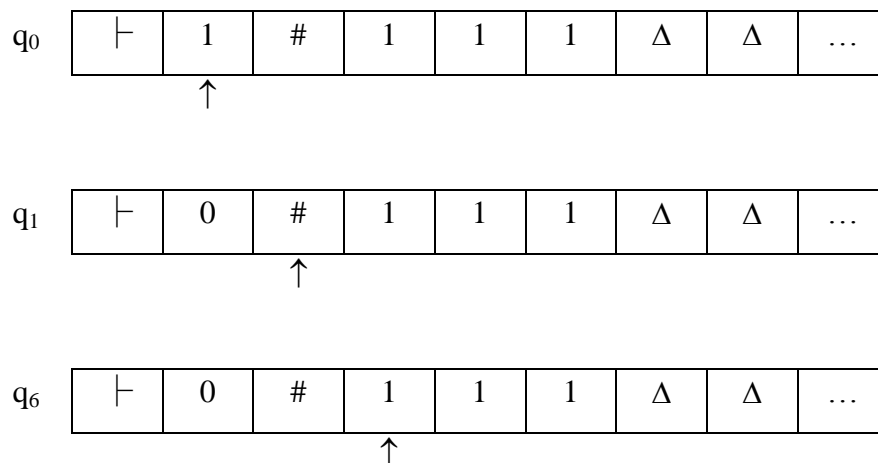
- (ימין, 1, q_2 , 1, q_1)
- (ימין, #, q_6 , #, q_1)
- (ימין, 1, q_2 , 1, q_2)
- (ימין, #, q_3 , #, q_2)
- (ימין, 0, q_3 , 0, q_3)
- (שמאל, 1, q_4 , 0, q_3)
- (שמאל, 0, q_4 , 0, q_4)
- (שמאל, #, q_5 , #, q_4)
- (ימין, 0, q_0 , 0, q_5)
- (שמאל, 1, q_5 , 1, q_5)
- (ימין, 0, q_6 , 0, q_6)
- (ימין, 1, q_7 , \$, q_6)
- (ימין, 1, q_7 , 1, q_7)
- (ימין, Δ , q_8 , \$, q_7)

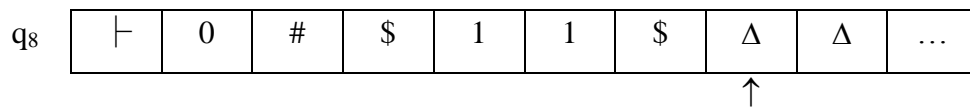
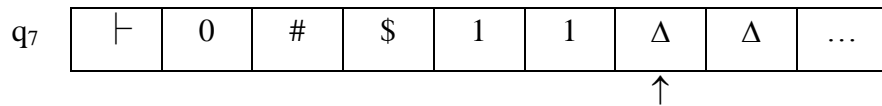
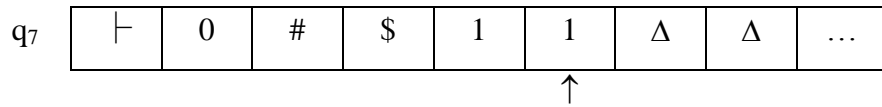
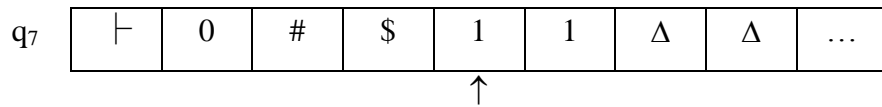
q_8 הוא המצב המקבל היחיד.

- א. הצג את תהליך החישוב של המכונה על הקלט 111 (נתון ראשון) ו-1 (נתון שני).
- ב. הסבר כיצד מכונה זו דוחה קלט שבו הנתון הראשון הוא 0 (כלומר, כיצד דחייה זו באה לידי ביטוי בקבוצת המעברים של המכונה).
- ג. איזו פונקציה מחשבת המכונה הנתונה? הסבר.
- ד. נשנה את הגדרת הפונקציה כך שתהיה מוגדרת גם עבור קלט בו הנתון הראשון הוא 0. תאר כיצד יש לשנות את המכונה שלעיל, כך שתחשב את הפונקציה החדשה.

פתרון

א.





הפלט הוא המספר 2 באונרית.

ב. אין מעבר מתאים עבור המצב q_0 ואות הקלט #.

ג. המכונה מחשבת את הקלט $f(x,y)=y-x$ עבור $0 < x \leq y$

הסבר: עבור כל אות 1 שנקראת בנתון הראשון פרט לאחרונה, המכונה מסמנת אותה ב-0 ומוחקת גם אות 1 בנתון השני (ע"י כך שכותבת במקומו 0), עבור האות האחרונה מהנתון הראשון המכונה כותבת סימן \$ על האות הבאה בנתון השני. בכך היא גם מוחקת את האות 1 בנתון השני המתאימה לאות האחרונה בנתון הראשון וגם מסמנת את תחילת הפלט המכיל את שארית הנתון השני. אז המכונה עוברת ימינה כדי לכתוב \$ נוסף אחרי שארית הנתון השני, בתא הריק הראשון.

ד. יש להוסיף את המעבר (ימין, \$, q_7 , #, q_0). בכך מובטח שייכתב סימן \$ נוסף לפני הנתון השני (במקום החוצץ), בלי למחוק אף אות בנתון השני, ובתא הריק הראשון אחריו ייכתב סימן \$ נוסף.

שאלה 8 (דגנית מורן)

נתונה מכונת טיורינג המתקבלת כקלט מספר שלם חיובי כתוב באונרית, ונותנת כפלט מספר שלם כתוב באונרית, עפ"י מוסכמות הכתיבה המתוארות בספר הלימוד.

לפניך קבוצת המעברים של המכונה:

(ימין, X, q_1 , 1, q_0)

(ימין, X, q_2 , 1, q_1)

(ימין, \$, q_7 , Δ, q_1)

(ימין, X, q_3 , 1, q_2)

(ימין, \$, q_6 , Δ, q_2)

(ימין, 1 , q_1 , X)

(ימין, Δ , q_4 , $\$$)

(ימין, Δ , q_5 , $\$$)

(ימין, Δ , q_7 , 1)

(ימין, Δ , q_4 , 1)

q_5 הוא המצב המקבל היחיד.

א. תאר את המכונה בדרך גרפית.

ב. הדגם את פעולת המכונה על המספרים 5 ו-3.

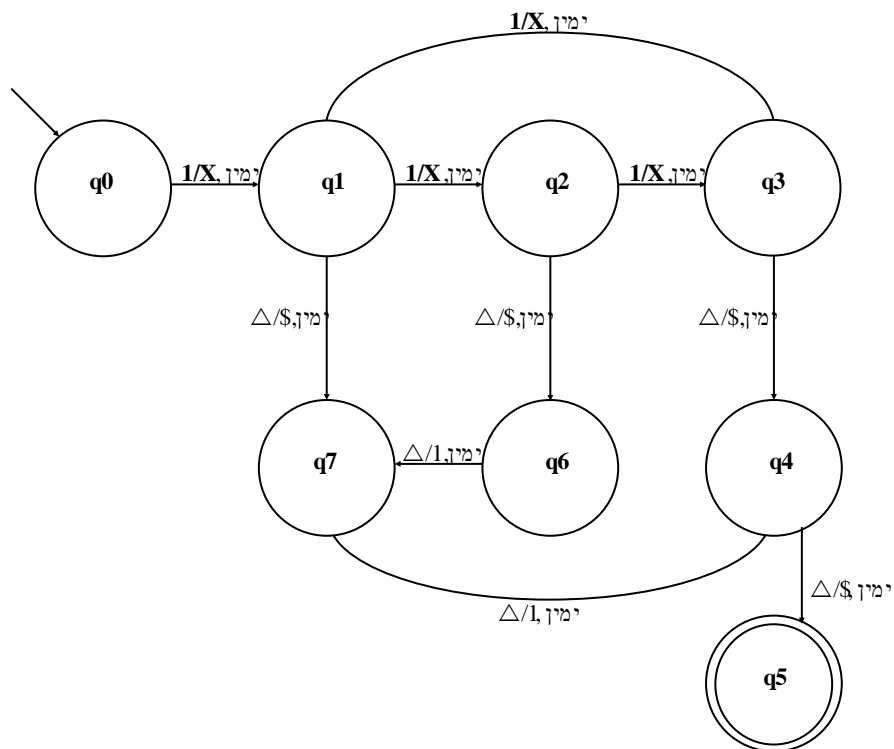
ג. איזו פונקציה מחשבת המכונה? הסבר.

ד. היכן מתבטאת בקבוצת המעברים העובדה כי הקלט אינו יכול להיות שווה ל-0?

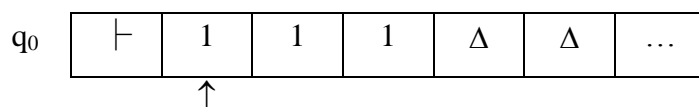
שנה את המכונה כך שתדע לקבל גם קלט שווה ל-0.

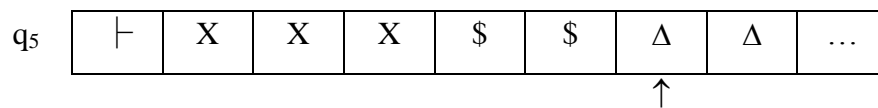
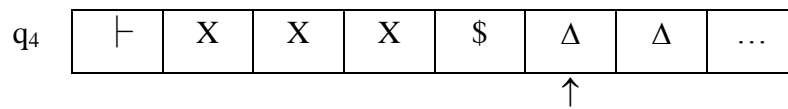
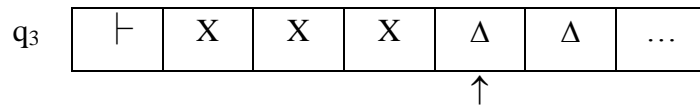
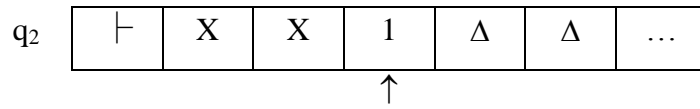
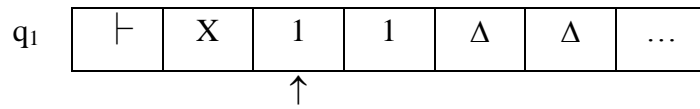
פתרון

א.

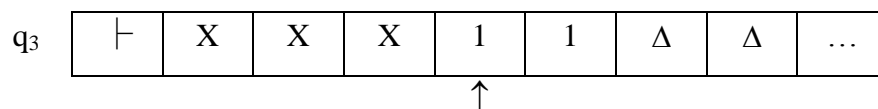
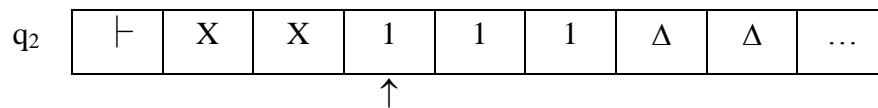
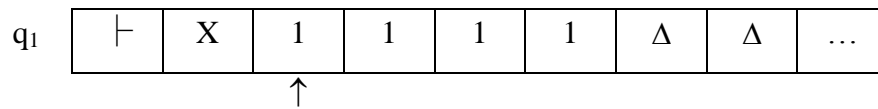
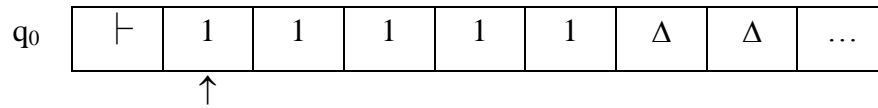


ב. עבור הקלט 3:





הפלט הוא 0.
 עבור הקלט 5:





הפלט הוא 2.

ג. המכונה מחשבת את הפונקציה $f(x) = x \bmod 3$ עבור $0 \leq x$. בעזרת המצבים q_3, q_2, q_1 היא זוכרת את שארית החלוקה ב-3 של מספר האותיות 1 שנקראו q_1 – שארית 1, q_2 – שארית 2, q_3 – שארית 0. בסיום המילה, היא כותבת \$ בתא הריק הראשון ואז מוסיפה אות 1 אחת, 2 אותיות 1 או 0 אותיות 1, בהתאם למצב בו סיימה את קריאת המילה (q_2, q_1 ו- q_3 בהתאמה). לבסוף היא כותבת אות \$ נוספת.

ד. אין מעבר מתאים ל- q_0 ולתא ריק. ניתן לתקן זאת ע"י הוספת המעבר הבא:

(ימין, \$, q_4 , Δ, q_0)

שאלה 9 (דגנית מורן)

נתונה מכונת טיורינג המקבלת כקלט שני מספרים שלמים אי-שליליים הכתובים באונרית, ונותנת כפלט מספר הכתוב באונרית, עפ"י מוסכמות הכתיבה המתוארות בספר הלימוד. לפניך קבוצת המעברים של המכונה:

(ימין, \$, q_9 , #, q_0)

($q_0, 1, q_1, X$, ימין)
($q_1, 1, q_1, 1$, ימין)
($q_1, \#, q_2, \#$, ימין)
($q_2, 1, q_2, 1$, ימין)
(q_2, Y, q_3, Y , שמאל)
(q_2, Δ, q_3, Δ , שמאל)
($q_3, 1, q_4, Y$, שמאל)
($q_3, \#, q_5, 1$, ימין)
($q_4, 1, q_4, 1$, שמאל)
($q_4, \#, q_4, \#$, שמאל)
(q_4, X, q_0, X , ימין)
($q_5, Y, q_6, \$$, שמאל)
($q_5, \Delta, q_6, \$$, שמאל)
($q_6, 1, q_7, 1$, שמאל)
($q_7, 1, q_7, 1$, שמאל)
($q_7, X, q_8, \$$, שמאל)
($q_9, Y, q_8, \$$, ימין)
($q_9, \Delta, q_8, \$$, ימין)
($q_9, 1, q_9, 1$, ימין)

המצב המקבל היחיד הוא q_8 .

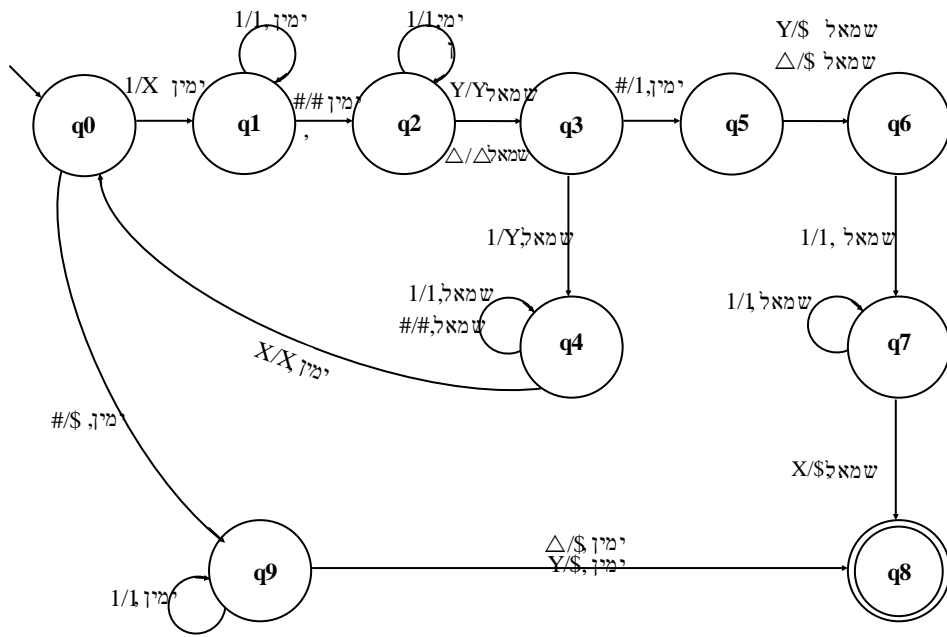
א. צייר את המכונה.

ב. הדגם את פעולת המכונה על זוגות המספרים: 1 נתון ראשון, 3 נתון שני.

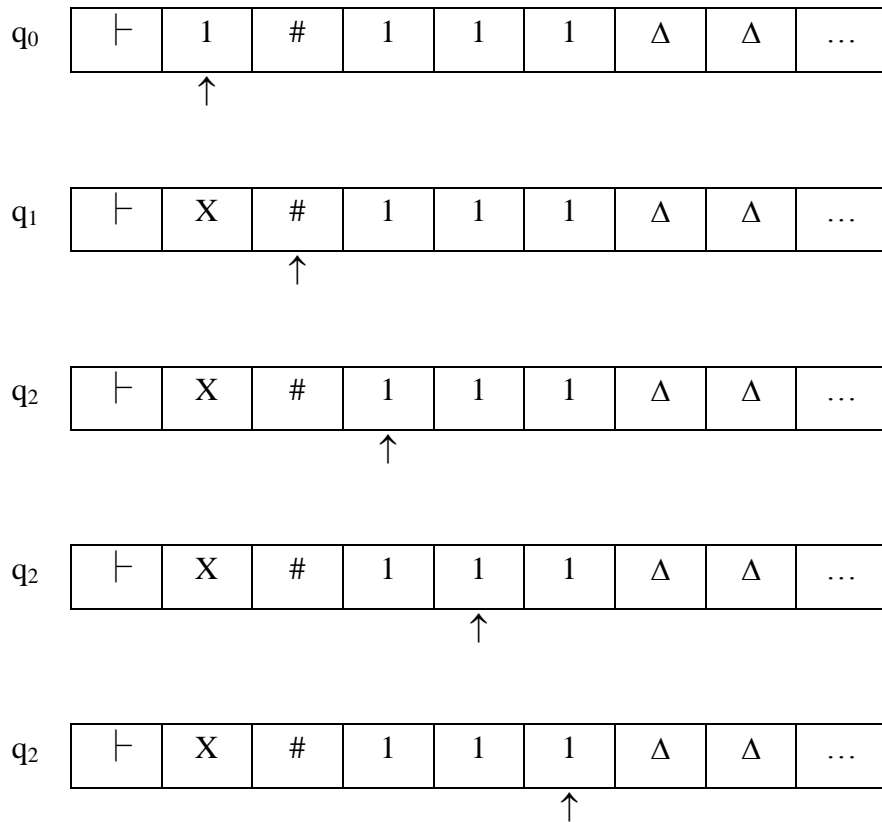
3 נתון ראשון, 2 נתון שני.

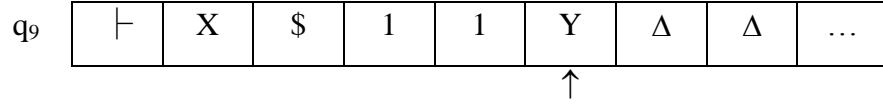
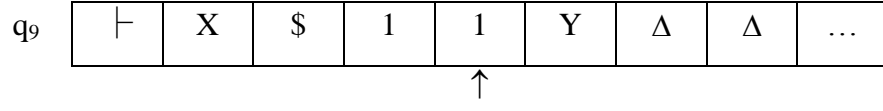
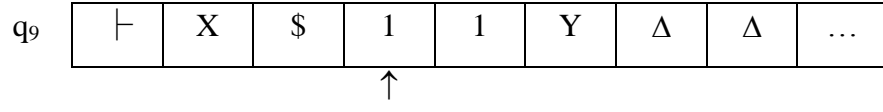
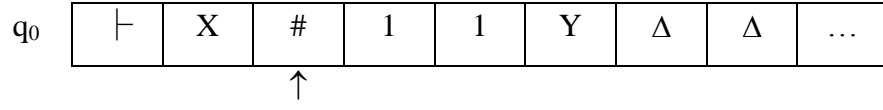
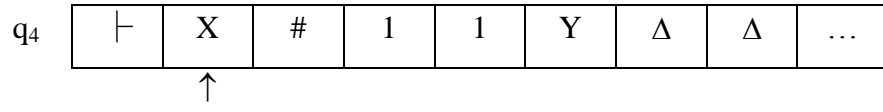
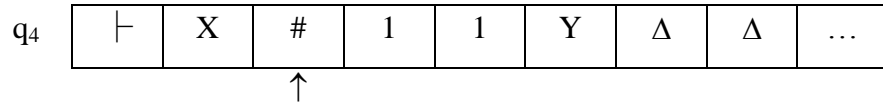
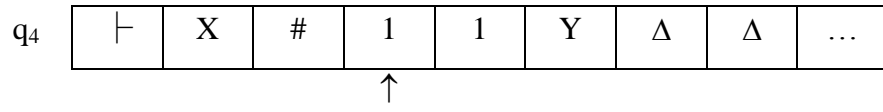
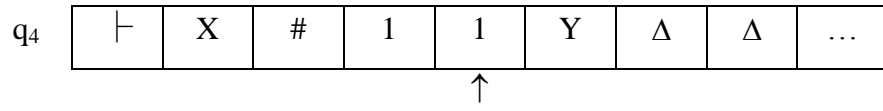
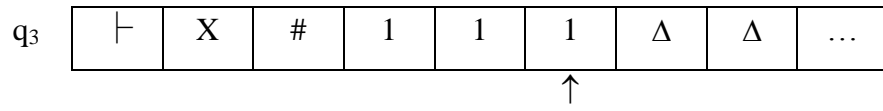
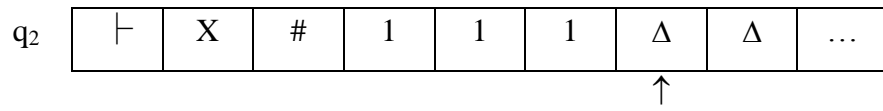
ג. איזו פונקציה מחשבת המכונה? הסבר.

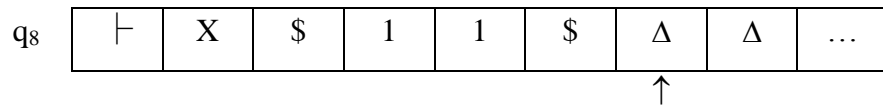
פתרון



ב. עבור הקלטים 1 ו-3:

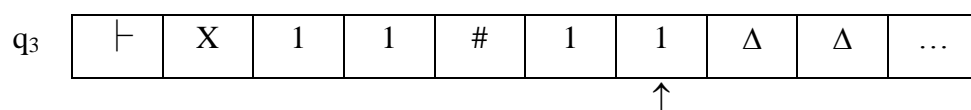
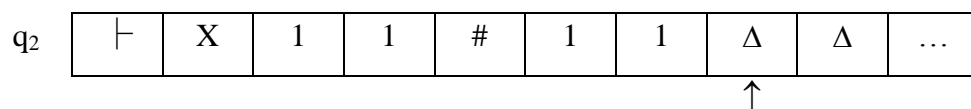
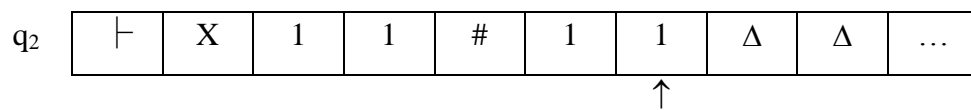
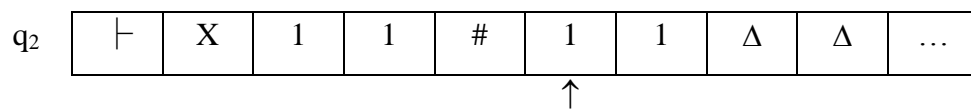
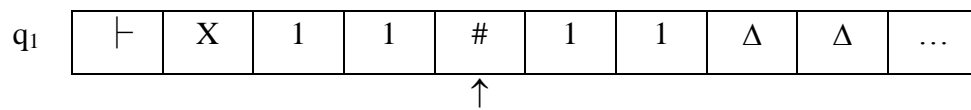
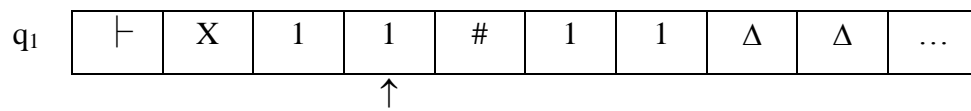
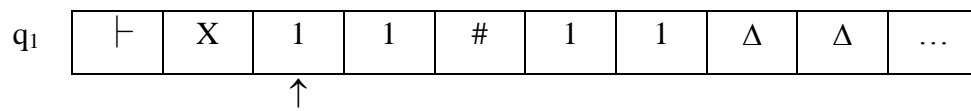
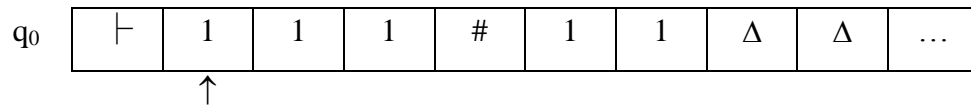


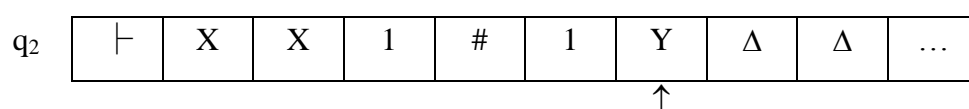
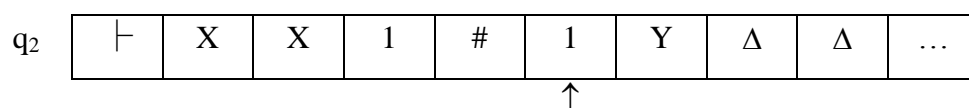
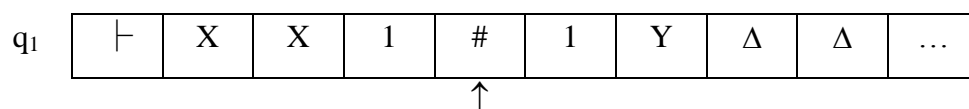
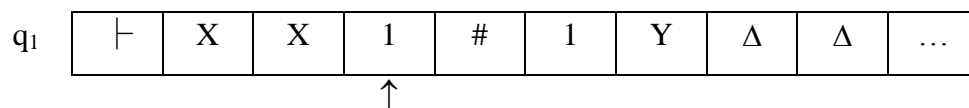
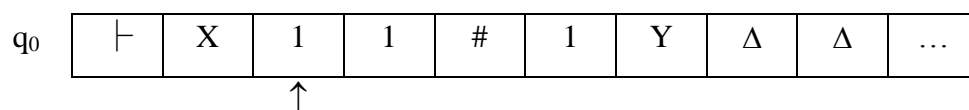
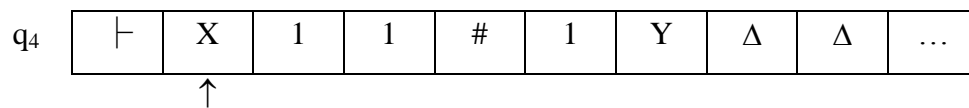
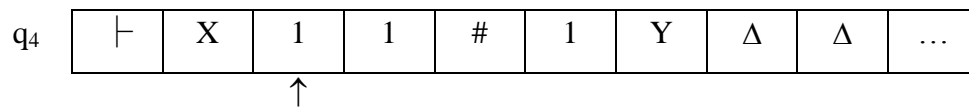
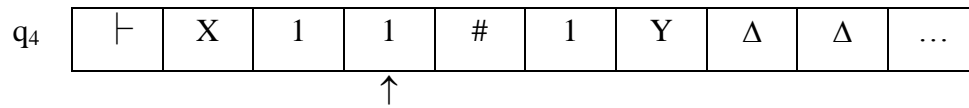
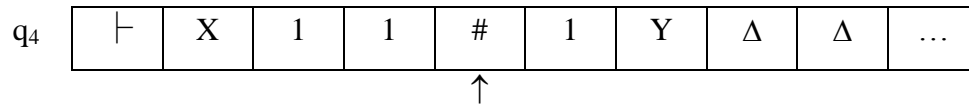
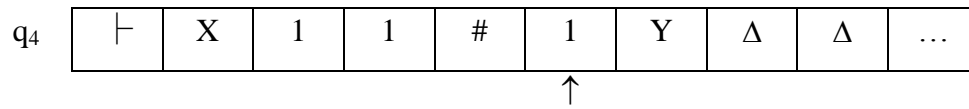


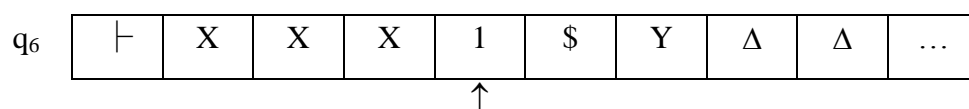
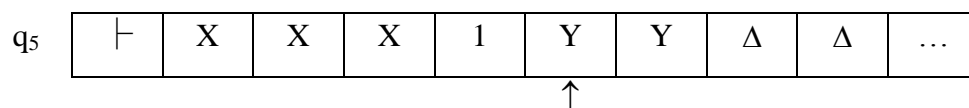
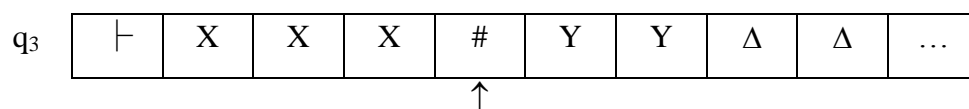
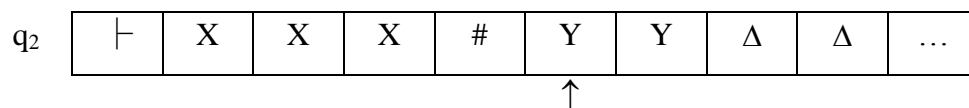
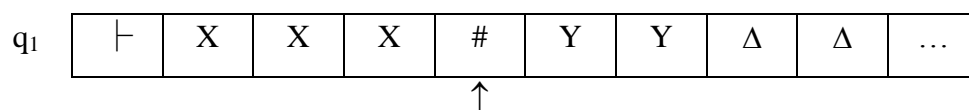
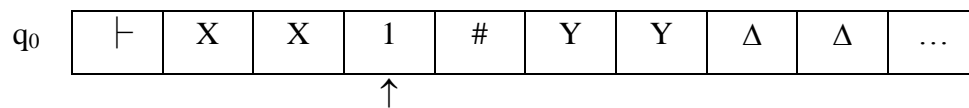
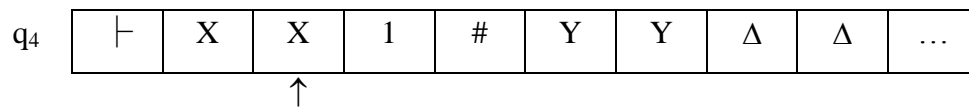
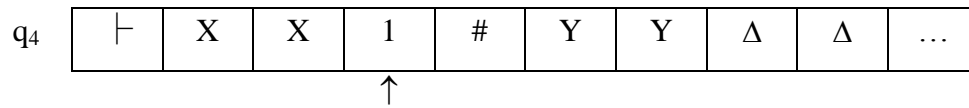
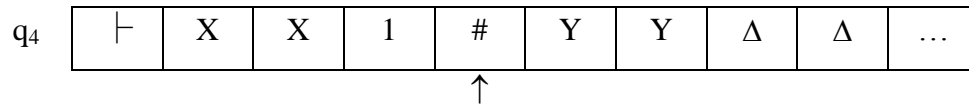
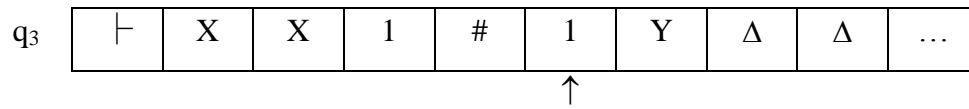


הפלט הוא 2.

עבור הקלטים 3 ו-2:







q7	┌	X	X	X	1	\$	Y	Δ	Δ	...
				↑						
q8	┌	X	X	\$	1	\$	Y	Δ	Δ	...
			↑							

הפלט הוא 1.

ג. המכונה מחשבת את הפונקציה $f(x) = |x-y|$.

בשלב ראשון היא מסמנת לסירוגין ב-X 1 שמאלי ביותר שעדיין לא סומן בנתון הראשון וב-Y 1 ימני ביותר שעדיין לא סומן בנתון השני. כאשר היא מזהה שאחד הנתונים הסתיים היא משתמשת בשארית הנתון האחר כדי ליצור את מילת הפלט. אם הנתון שהסתיים הוא הראשון אז במקום החוצץ נכתב סימן \$ ראשון ובתא הריק הראשון או על גבי האות הראשונה המסומנת בנתון השני נכתב סימן \$ שני. אם הנתון שהסתיים הוא השני אז במקום החוצץ נכתבת אות 1 (כדי להחזיר את האות שכבר סומנה בנתון הראשון ואין לה מקבילה בנתון השני), מימינו נכתב סימן \$ המסיים את מילת הפלט ועל גבי האות האחרונה המסומנת בנתון הראשון נכתב סימן \$ פותח.