

החומרים שלפניכם הוכנו על-ידי מורים מובילים שהשתתפו בקורס תשס"ג, בהנחיית ד"ר מיכל ארמוני מהאוניברסיטה הפתוחה. ניתן להשתמש בחומרים לצורך הוראה אבל אסור לעשות בהם כל שימוש מסחרי ללא קבלת אישור מראש מהמחברים.

בניית מכונות טיורינג

שאלה 1 (איריס ברגורי)

בנה מכונת טיורינג המקבלת את השפה הבאה מעל הא"ב $\{0,1\}$: $L = \{0^n 1^n \mid n > 0\}$.

פתרון

המכונה תעבוד על פי האלגוריתם הבא: בכל שלב היא תמחוק 0 שמאלי ביותר ו-1 ימני ביותר. אם בתחילת שלב לא נותרו עוד אותיות קלט לטיפול הרי שהמילה בשפה. בכל מקרה אחר, המילה אינה בשפה.

למכונה חמישה מצבים:

q_0 – מצב התחלתי ומצב תחילת שלב מחיקה חדש, בו המכונה מצפה לראות 0.

q_1 – סריקה ימינה עד התא הריק הראשון.

q_2 – המכונה מצפה לראות 1 המיועד למחיקה.

q_3 – סריקה שמאלה עד התא הריק הראשון.

q_4 – הסתיימה קריאת מילת הקלט בהצלחה. מצב מקבל.

המעברים:

($q_0, 0, q_1, \Delta$, ימין)	מחיקת 0 תורן משמאל –
(q_0, Δ, q_4, Δ , ימין)	אין עוד אותיות קלט. המילה שייכת לשפה –
($q_1, 0, q_1, 0$, ימין)	סריקה ימינה עד התא הריק הראשון –
($q_1, 1, q_1, 1$, ימין)	
(q_1, Δ, q_2, Δ , שמאל)	
($q_2, 1, q_3, \Delta$, שמאל)	מחיקת 1 תורן מימין –
($q_3, 0, q_3, 0$, שמאל)	סריקה שמאלה עד התא הריק הראשון –
($q_3, 1, q_3, 1$, שמאל)	
(q_3, Δ, q_0, Δ , ימין)	

שימו לב כי א"ב המכונה הוא ריק.

שאלה 2 (ויקטוריה צורי)

בנה מכונת טיורינג, המקבלת את שפת כל המילים מעל הא"ב $\{a,b,c,e\}$ שהן מהצורה wew_1 כאשר w היא מילה מעל הא"ב $\{a,b,c\}$ ו- w_1 מתקבלת מ- w על ידי השמטת כל האותיות a מ- w . למשל, המילים $abbcebbc$, $bbaacebbc$, e , aae ו- beb שייכות לשפה.

פתרון

שאלה זו מתאימה לשיעורי בית ואף למבחן, אחרי שנדונה בכיתה בניית מכונת טיורינג לשפת הראי המסומנת. המכונות המתאימות דומות למדי.

המכונה עובדת על-פי האלגוריתם הבא: בכל שלב מחפשת המכונה את האות הבאה לטיפול שאינה a בחלקה השמאלי של המילה. כאשר מצאה אותה היא מסמנת אותה ועוברת לחפש בחלקה הימני של המילה (אחרי האות e) את האות הבאה שאינה מסומנת ומוודאת שהיא זהה לאות שסומנה אחרונה בחלק השמאלי של המילה (שאת זהותה היא זוכרת בעזרת המצבים). כאשר לא נותרו עוד אותיות לטיפול בחלק השמאלי המכונה מוודאת שגם בחלק הימני לא נותרו אותיות לא מסומנות. למכונה שמונה מצבים:

q_0 – מצב התחלתי ומצב תחילת שלב סימון חדש, בו המכונה מחפשת אות חדשה לטיפול.

q_1 – סומנה b בחלקה השמאלי של המילה.

q_2 – סומנה c בחלקה השמאלי של המילה.

q_3 – נסרק חלקה הימני של המילה בחיפוש אחרי האות הבאה לסימון, שצריכה להיות b .

q_4 – נסרק חלקה הימני של המילה בחיפוש אחרי האות הבאה לסימון, שצריכה להיות c .

q_5 – חזרה שמאלה בתום שלב הסימון.

q_6 – לא נותרו אותיות לטיפול בחלק השמאלי ויש לוודא כי גם בחלק הימני אין אותיות לא מסומנות.

q_7 – מצב מקבל.

א"ב המכונה הוא $\{X, Y\}$ (ניתן להסתפק גם באות אחת X ולסמן בעזרתה בשני חלקי המילה). המעברים:

(ימין, q_0, a, q_0, X) – האות האחרונה שנקראה היא a יש לסמנה ולעבור לאות הבאה –

(ימין, q_0, b, q_1, X) – סומנה b בחלק השמאלי. יש לחפש b בחלק הימני –

(ימין, q_0, c, q_2, X) – סומנה c בחלק השמאלי, יש לחפש c בחלק הימני –

סריקה עד חלקה הימני של המילה כאשר האות האחרונה שסומנה בחלק

השמאלי היא b – (ימין, q_1, a, q_1, a)

(ימין, q_1, b, q_1, b)

(ימין, q_1, c, q_1, c)

סריקה עד חלקה הימני של המילה כאשר האות האחרונה שסומנה בחלק

השמאלי היא c – (ימין, q_2, a, q_2, a)

(ימין, q_2, b, q_2, b)

(ימין, q_2, c, q_2, c)

- (ימין, q_1, e, q_3, e) – המכונה נכנסה לחלק הימני ומחפשת b לסימון –
- (ימין, q_2, e, q_4, e) – המכונה נכנסה לחלק הימני ומחפשת c לסימון –
- (ימין, q_3, Y, q_3, Y) – דילוג על אותיות מסומנות בחלק הימני –
- (ימין, q_4, Y, q_4, Y) – סימון מוצלח ופניה לכיוון תחילת השלב הבא –
- (שמאל, q_3, b, q_5, Y) –
- (שמאל, q_4, c, q_5, Y) –
- (שמאל, q_5, Y, q_5, Y) – סריקה שמאלה עד תחילת שלב סימון חדש –
- (שמאל, q_5, e, q_5, e) –
- (שמאל, q_5, a, q_5, a) –
- (שמאל, q_5, b, q_5, b) –
- (שמאל, q_5, c, q_5, c) –
- (ימין, q_5, X, q_0, X) – תחילת שלב סימון חדש –
- (ימין, q_0, e, q_6, e) – לא נותרו אותיות לא מסומנות בחלק השמאלי –
- (ימין, q_6, Y, q_6, Y) – סריקה כדי לוודא שגם בחלק הימני לא נותרו אותיות לא מסומנות –
- (ימין, q_6, Δ, q_7, Δ) – סיום מוצלח –

שאלה 3 (ריקה רם)

בנה מכונת טיורינג המקבלת מספר טבעי n ביצוג אונארי ומחשבת את השארית השלמה של חלוקת המספר ב-3. כלומר $f(n) = n \bmod 3$ כאשר $n \geq 0$.

פתרון

בכל שלב המכונה תזהה שלשת אותיות 1 ואם מצאה שלשה – תמחק אותה. בשלב הסיום תקיף המכונה את מה שנותר על הסרט ב- $\$$.

א"ב הקלט הוא $\{1\}$ וא"ב המכונה הוא $\{\$, \}$.

המצבים:

- q_0 – מצב התחלתי ומצב תחילת שלב מציאת שלשה.
- q_1 – זוכר כי נקרא 1 ראשון בשלשה.
- q_2 – זוכר כי נקרא 1 שני בשלשה.
- q_3 – זוכר כי נקרא ונמחק 1 שלישי בשלשה. מפנה שמאלה להמשך מחיקת השלשה.
- q_4 – זוכר כי נמחק 1 שני בשלשה.
- q_5 – זוכר כי נמחק 1 ראשון בשלשה.
- q_6 – זוכר כי דולגה אות מחוקה שניה.
- q_7 – זוכר כי סומנה אות $\$$ ימנית, פונה שמאלה לחיפוש המקום לסימון אות $\$$ שמאלית.

- q_8 – במקרה שיש צורך בהזזת הפלט לצורך סימון אות \$ שמאלית (כאשר $n < 3$), המצב זוכר כי סומנה אות \$ שמאלית ויש להשלים עוד 1 שנמחה.
- q_9 – זוכר כי יש להשלים עוד אות \$ ימנית שנמחה.
- q_{10} – מצב סיום תהליך.
- q_{10} הוא המצב המקבל.
- אלו המעברים:
- קריאת 1 ראשון בשלשה – (ימין, 1, q_1 , 1, q_0)
- קריאת 1 שני בשלשה – (ימין, 1, q_2 , 1, q_1)
- קריאת ומחיקת 1 שלישי בשלשה – (שמאל, Δ , q_3 , 1, q_2)
- מחיקת 1 שני בשלשה – (שמאל, Δ , q_4 , 1, q_3)
- מחיקת 1 ראשון בשלשה – (ימין, Δ , q_5 , 1, q_4)
- דילוג על 1 מחוק שני בשלשה – (ימין, Δ , q_6 , Δ , q_5)
- דילוג על 1 מחוק שלישי בשלשה – (ימין, Δ , q_0 , Δ , q_6)
- נשארה שארית 1. סימון קצה ימני של הפלט – (שמאל, \$, q_7 , Δ , q_1)
- נשארה שארית 2. סימון קצה ימני של הפלט – (שמאל, \$, q_7 , Δ , q_2)
- נשארה שארית 0. סימון קצה ימני של הפלט – (שמאל, \$, q_7 , Δ , q_0)
- דילוג שמאלה בדרך לחיפוש מקום לסימון קצה שמאלי של הפלט – (שמאל, 1, q_7 , 1, q_7)
- סימון קצה שמאלי ומעבר למצב סיום – (ימין, \$, q_{10} , Δ , q_7)
- סימון קצה שמאלי ויש צורך בהזזת הפלט – (ימין, \$, q_8 , \vdash , q_7)
- המשך הזזת הפלט – (ימין, 1, q_8 , 1, q_8)
- הושלם 1 שנמחה במסגרת ההזזה ויש צורך בסימון קצה קלט ימני חדש – (ימין, 1, q_9 , \$, q_8)
- סימון קצה ימני ומעבר למצב סיום – (ימין, \$, q_{10} , Δ , q_9)

שאלה 4 (אסנת אנגלמן, אסתי מאסטראסי ואורנה שטיין)

בנה מכונת טיורינג המקבלת ארבעה מספרים בינאריים ומחזירה כפלט כמה מספרים מתוך הארבעה הם זוגיים. על המכונה לעבוד לפי מוסכמות הקלט והפלט שבספר הלימוד.

פתרון

המכונה שנבנה זוכרת בעזרת בקרת המצבים כמה מספרים זוגיים וכמה מספרים אי-זוגיים ראתה. בהתאם למצב בו היא נמצאת עם סיום קריאת הקלט נכתב הפלט. משום כך יש למכונה זו מצבים רבים. הזיהוי אם מספר הוא זוגי או לא נעשה לפי האות האחרונה (הימנית) שלו: אם היא 0 זה מספר זוגי, ואם היא 1 זה מספר אי-זוגי. א"ב הקלט הוא $\{0,1,\#\}$. א"ב המכונה הוא $\{\$,X\}$. למכונה 32 מצבים:

- q0 – מצב התחלתי, בו המכונה מחפשת את החוצץ הראשון.
- q1 – אחרי זיהוי החוצץ הראשון, לקריאת האות האחרונה של המספר הראשון.
- q2 – לחיפוש החוצץ השני כאשר היה מספר אי-זוגי אחד.
- q3 – לחיפוש החוצץ השני כאשר היה מספר זוגי אחד.
- q4 – אחרי זיהוי החוצץ השני – לקריאת האות האחרונה של המספר השני, כאשר המספר הראשון היה אי-זוגי.
- q5 – אחרי זיהוי החוצץ השני – לקריאת האות האחרונה של המספר השלישי, כאשר המספר הראשון היה זוגי.
- q6 – לחיפוש החוצץ השלישי כאשר לפני כן היו שני מספרים אי-זוגיים.
- q7 – לחיפוש החוצץ השלישי כאשר לפני כן היה מספר אחד זוגי ומספר אחד אי-זוגי.
- q8 – לחיפוש החוצץ השלישי כאשר לפני כן היו שני מספרים זוגיים.
- q9 – אחרי זיהוי החוצץ השלישי, לקריאת האות האחרונה של המספר השלישי כאשר לפני כן היו שני מספרים אי-זוגיים.
- q10 – אחרי זיהוי החוצץ השלישי, לקריאת האות האחרונה של המספר השלישי, כאשר לפני כן היה מספר אחד זוגי ומספר אחד אי-זוגי.
- q11 – אחרי זיהוי החוצץ השלישי, לקריאת האות האחרונה של המספר השלישי, כאשר לפני כן היו שני מספרים זוגיים.
- q12 – לחיפוש סוף הקלט כאשר לפני כן היו שלושה מספרים אי-זוגיים.
- q13 – לחיפוש סוף הקלט כאשר לפני כן היו שני מספרים אי-זוגיים ומספר אחד זוגי.
- q14 – לחיפוש סוף הקלט כאשר לפני כן היו מספר אחד אי-זוגי ושני מספרים זוגיים.
- q15 – לחיפוש סוף הקלט כאשר לפני כן היו שלושה מספרים זוגיים.
- q16 – אחרי זיהוי סוף הקלט, לקריאת האות האחרונה של המספר הרביעי, כאשר לפני כן היו שלושה מספרים אי-זוגיים.
- q17 – אחרי זיהוי סוף הקלט, לקריאת האות האחרונה של המספר הרביעי, כאשר לפני כן היו שני מספרים אי-זוגיים ומספר אחד זוגי.
- q18 – אחרי זיהוי סוף הקלט, לקריאת האות האחרונה של המספר הרביעי, כאשר לפני כן היו מספר אחד אי-זוגי ושני מספרים זוגיים.
- q19 – אחרי זיהוי סוף הקלט, לקריאת האות האחרונה של המספר הרביעי, כאשר לפני כן היו שלושה מספרים זוגיים.
- q20 – לחיפוש סוף הקלט כאשר לפני כן היו ארבעה מספרים אי-זוגיים.

- q₂₁ – לחיפוש סוף הקלט כאשר לפני כן היו שלושה מספרים אי-זוגיים ומספר אחד זוגי.
- q₂₂ – לחיפוש סוף הקלט כאשר לפני כן היו שני מספרים אי-זוגיים ושניים זוגיים.
- q₂₃ – לחיפוש סוף הקלט כאשר לפני כן היו מספר אחד אי-זוגי ושלושה זוגיים.
- q₂₄ – לחיפוש סוף הקלט כאשר לפני כן היו ארבעה מספרים זוגיים.
- q₂₅ – נכתב \$ ראשון וכעת יש לכתוב \$ שני.
- q₂₆ – נכתב \$ ראשון וכעת יש לכתוב עוד 1.
- q₂₇ – נכתב \$ ראשון וכעת יש לכתוב 10.
- q₂₈ – נכתוב \$ ראשון וכעת יש לכתוב 11.
- q₂₉ – נכתב \$ ראשון וכעת יש לכתוב 100.
- q₃₀ – נכתב \$ ראשון וכעת יש לכתוב 00.
- q₃₁ – נכתב \$ ראשון וכעת יש עוד לכתוב 0.
- q₃₂ – מצב מקבל.

אלו המעברים:

- (ימין, 0, q₀, 0) – חיפוש חוצץ ראשון –
- (ימין, 1, q₀, 1)
- (שמאל, #, q₁, X) – מציאת חוצץ ראשון –
- (ימין, 1, q₂, 1) – מספר ראשון אי-זוגי –
- (ימין, 0, q₃, 0) – מספר ראשון זוגי –
- (ימין, 0, q₂, 0) – חיפוש חוצץ שני –
- (ימין, 1, q₂, 1)
- (ימין, X, q₂, X)
- (ימין, 0, q₃, 0)
- (ימין, 1, q₃, 1)
- (ימין, X, q₃, X)
- (שמאל, #, q₄, X) – מציאת חוצץ שני –
- (שמאל, #, q₅, X)
- (ימין, 1, q₆, 1) – שני מספרים אי-זוגיים –
- (ימין, 0, q₇, 0) – מספר אחד זוגי ואחד אי-זוגי –
- (ימין, 1, q₇, 1)
- (ימין, 0, q₈, 0) – שני מספרים זוגיים –
- (ימין, 0, q₆, 0) – חיפוש חוצץ שלישי –
- (ימין, 1, q₆, 1)
- (ימין, X, q₆, X)

(ימין, 0, q7, 0)	
(ימין, 1, q7, 1)	
(ימין, X, q7, X)	
(ימין, 0, q8, 0)	
(ימין, 1, q8, 1)	
(ימין, X, q8, X)	
(שמאל, q6, #, q9, X)	מציאת חוצץ שלישי –
(שמאל, q7, #, q10, X)	
(שמאל, q8, #, q11, X)	
(ימין, 1, q9, 1, q12, 1)	שלושה אי-זוגיים –
(ימין, 0, q9, 0, q13, 0)	שני אי-זוגיים וזוגי –
(ימין, 1, q10, 1, q13, 1)	
(ימין, 0, q10, 0, q14, 0)	שני זוגיים ואי-זוגי –
(ימין, 1, q11, 1, q14, 1)	
(ימין, 0, q11, 0, q15, 0)	שלושה זוגיים –
(ימין, 0, q12, 0, q12, 0)	חיפוש סוף הקלט –
(ימין, 1, q12, 1, q12, 1)	
(ימין, X, q12, X, q12, X)	
(ימין, 0, q13, 0, q13, 0)	
(ימין, 1, q13, 1, q13, 1)	
(ימין, X, q13, X, q13, X)	
(ימין, 0, q14, 0, q14, 0)	
(ימין, 1, q14, 1, q14, 1)	
(ימין, X, q14, X, q14, X)	
(ימין, 0, q15, 0, q15, 0)	
(ימין, 1, q15, 1, q15, 1)	
(ימין, X, q15, X, q15, X)	
(שמאל, q12, Δ, q16, Δ)	מציאת סוף קלט –
(שמאל, q13, Δ, q17, Δ)	
(שמאל, q14, Δ, q18, Δ)	
(שמאל, q15, Δ, q19, Δ)	
(ימין, 1, q16, 1, q20, 1)	ארבעה אי-זוגיים –
(ימין, 0, q16, 0, q21, 0)	שלושה אי-זוגיים וזוגי אחד –

(ימין, 1, q_{21} , 1, q_{17})	שני אי-זוגיים ו-שני זוגיים –
(ימין, 0, q_{22} , 0, q_{17})	
(ימין, 1, q_{22} , 1, q_{18})	
(ימין, 0, q_{23} , 0, q_{18})	אי-זוגי אחד ו-שלושה זוגיים –
(ימין, 1, q_{23} , 1, q_{19})	
(ימין, 0, q_{24} , 0, q_{19})	ארבעה זוגיים –
(ימין, Δ , q_{25} , \$, q_{20})	נכתב \$ ראשון. היו ארבעה אי זוגיים ולכן צריך לכתוב רק עוד \$ אחד –
(ימין, Δ , q_{26} , \$, q_{21})	נכתב \$ ראשון. היה זוגי אחד ולכן צריך לכתוב עוד 1 ואז \$ –
(ימין, Δ , q_{27} , \$, q_{22})	נכתב \$ ראשון. היו שני זוגיים ולכן צריך לכתוב עוד 10 ואז \$ –
(ימין, Δ , q_{28} , \$, q_{23})	נכתב \$ ראשון. היו שלושה זוגיים ולכן צריך לכתוב עוד 11 ואז \$ –
(ימין, Δ , q_{29} , \$, q_{24})	נכתב \$ ראשון. היו ארבעה זוגיים ולכן צריך לכתוב עוד 100 ואז \$ –
(ימין, Δ , q_{32} , \$, q_{25})	סיום מילת הפלט –
(ימין, Δ , q_{25} , 1, q_{26})	נכתב 1 ונותר לכתוב עוד \$ –
(ימין, Δ , q_{31} , 1, q_{27})	נכתב 1 ונותר לכתוב עוד 0 ו-\$ –
(ימין, Δ , q_{26} , 1, q_{28})	נכתב 1 ונותר לכתוב עוד 1 ו-\$ –
(ימין, Δ , q_{30} , 1, q_{29})	נכתב 1 ונותר לכתוב עוד 00 ו-\$ –
(ימין, Δ , q_{31} , 0, q_{30})	נכתב 0 ונותר לכתוב עוד 0 ו-\$ –
(ימין, Δ , q_{25} , 0, q_{31})	נכתב 0 ונותר עוד \$ לכתוב –

שימו לב: בגלל שמספר המספרים הזוגיים שיש לספור חסום, ניתן היה לזכור את ערכי הספירה השונים בעזרת המצבים. למעשה, קבוצת המצבים של המכונה היא מעין מכפלה של מצבי הבקרה הזוכרים באיזה שלב של האלגוריתם אנו נמצאים ומצבי המניה הזוכרים את ערכי הספירה השונים. אם מספר ערכי הספירה השונים לא היה חסום, המכונה הייתה צריכה לנהל מונה על סרט הזיכרון. כמובן שניתן לפשט את המכונה בצורה משמעותית אם מסתפקים בקלט של שלושה מספרים במקום ארבעה.

שאלה 5 (אסנת אנגלמן, אסתי מאסטרסי ואורנה שטיין)

בנה מכונת טיורינג המקבלת מילה בעברית ומזהה אם נכתבה בלשון נקבה (סיומת 'ה' או סיומת 'ות').

פתרון

זו מכונה פשוטה למדי הפועלת על א"ב הקלט ששווה לא"ב העברי, כלומר האותיות {א,ב,ג,...,ש,ת}. היא סורקת את הקלט עד סופו ואז חוזרת שמאלה לבדוק אם יש לו סיומת 'ה' או 'ות'. למכונה ארבעה מצבים:

q_0 – מצב התחלתי ומצב לסריקת מילת הקלט.

q_1 – מצב המזהה את סיום המילה.

q_2 – מצב הזוכר סיומת 'ת' ומחפש לפניה 'ו'.

q_3 – מצב מקבל.

אלו המעברים:

(q_0, σ, q_0, σ , ימין)	– לכל אות σ בא"ב העברי (יש כאן 22 מעברים) –
(q_0, Δ, q_1, Δ , שמאל)	– זיהוי סוף מילה –
(q_1, η, q_3, η , ימין)	– זיהוי סיומת 'ה' –
(q_1, θ, q_2, θ , שמאל)	– זיהוי סיומת 'ת' –
(q_2, ν, q_3, ν , ימין)	– זיהוי סיומת 'ות' –

שאלה 6 (אסנת אנגלמן, אסתי מאסטרסי ואורנה שטיין)

בנה מכונת טיורינג המקבלת את השפה הבאה מעל הא"ב $\{a,b\}$:

$$L = \{ w \cdot w_1 \mid w = w_1 \text{ או } w = R(w_1) \}$$

פתרון

זהו תרגיל לא קל המתאים כעבודת כיתה או בית אך לא למבחן.

המכונה היא מכונה לא דטרמיניסטית המנחשת בצעד הראשון אם מילת הקלט היא מהצורה $w \cdot w$ או $w \cdot R(w)$. בהתאם לניחוש היא ממשיכה לפעול כמו מכונה המקבלת את כל המילים מהצורה $w \cdot w$ או כמו מכונה המקבלת את כל המילים מהצורה $w \cdot R(w)$. ניתן להתייחס לזה כמו אל שתי תת-מכונות (שגרות) שאחת מהן אף היא לא דטרמיניסטית משום שעליה לנחש את נקודת האמצע של המילה.

נכתוב ראשית את התת-מכונות, כמכונות נפרדות, ואז נאחד אותן למכונה אחת. נתחיל במכונה המקבלת את כל המילים מהצורה $w \cdot w$. בשלב הראשון המכונה מסמנת את ראשונה ומנחשת כי מקום מסוים בקלט, שמייד אחריו נמצאת אות זהה לזו שנקראה, הוא אמצע המילה. מהשלב השני ואילך, המכונה מסמנת לסירוגין את בחלק השמאלי של המילה ואת זהה לה בחלק הימני של המילה.

א"ב הקלט הוא כמובן $\{a,b\}$ וא"ב המכונה הוא $\{X,Y\}$. למכונה תשעה מצבים:

p_0 – מצב התחלתי, בו המכונה מצפה לראות את האות הראשונה לסימון בחלקה הראשון (השמאלי) של המילה.

p_1 – מצב תחילת שלב שני ואילך, בו המכונה מצפה לראות את האות הבאה לסימון בחלקה הראשון של המילה.

p_2 – מצב בו המכונה סורקת את חלקה הראשון של המילה, לפני הגיעה לחלקה השני, ובחלק הראשון סומנה האות a , והמכונה טרם ניחשה את נקודת אמצע המילה.

p_3 – מצב בו המכונה סורקת את חלקה הראשון של המילה, לפני הגיעה לחלקה השני, ובחלק הראשון סומנה האות b , והמכונה טרם ניחשה את נקודת אמצע המילה.

p_4 – מצב בו המכונה מצפה לראות את האות הבאה לסימון בחלק השני של המילה ועליה להיות a .

p_5 – מצב בו המכונה מצפה לראות את האות הבאה לסימון בחלק השני של המילה ועליה להיות b.
 p_6 – סומנה אות בחלקה השני של המילה ויש חזרה אחורה עד לאות הבאה לסימון בחלקה הראשון של המילה.

p_7 – מצב סריקה ימינה עם סיום החלק הראשון לוודא שהסתיים גם החלק השני.

p_8 – מצב מקבל.

המעברים:

- (p_0, a, p_2, X , ימין) – סומנה אות ראשונה בחלק הראשון וזו a
- (p_0, b, p_3, X , ימין) – סומנה אות ראשונה בחלק הראשון וזו b
- (p_2, a, p_2, a , ימין) – סריקת החלק הראשון לפני חציית קו האמצע
- (p_2, b, p_2, b , ימין)
- (p_3, a, p_3, a , ימין)
- (p_3, b, p_3, b , ימין)
- (p_3, a, p_6, Y , שמאל) – ניחוש נקודת האמצע
- (p_3, b, p_6, Y , שמאל)
- (p_6, Y, p_6, Y , שמאל) – סריקה אחורה עד האות הבאה לסימון בחלק הראשון
- (p_6, a, p_6, a , שמאל)
- (p_6, b, p_6, b , שמאל)
- (p_6, X, p_1, X , ימין)
- (p_1, a, p_4, X , ימין) – סומנה אות שנייה ויותר בחלק הראשון וזו a
- (p_1, b, p_5, X , ימין) – סומנה אות שנייה ויותר בחלק הראשון וזו b
- (p_4, a, p_4, a , ימין) – סריקת החלק הראשון ותחילת החלק השני עד האות הבאה לסימון בחלק השני
- (p_4, b, p_4, b , ימין)
- (p_4, Y, p_4, Y , ימין)
- (p_5, a, p_5, a , ימין)
- (p_5, b, p_5, b , ימין)
- (p_5, Y, p_5, Y , ימין)
- (p_4, a, p_6, Y , שמאל) – סומנה אות בחלק השני של המילה
- (p_5, b, p_6, Y , שמאל)
- (p_1, Y, p_7, Y , ימין) – סיום החלק הראשון של המילה
- (p_7, Y, p_7, Y , ימין) – סריקה ימינה לוודא שהסתיים החלק השני
- (p_7, Δ, p_8, Δ , ימין) – סיום החלק השני
- (p_0, Δ, p_8, Δ , ימין) – לקבלת המילה הריקה

ניתן לוותר על המעבר האחרון, אם הופכים את p_0 למצב מקבל.

המכונה השנייה אמורה כאמור לקבל את כל המילים מהצורה $w \cdot R(w)$. המכונה מסמנת בכל שלב אות תורנית שמאלית ביותר ואות תורנית ימנית ביותר זהה לה. גם א"ב הקלט שלה הוא $\{a,b\}$ וא"ב המכונה אף הוא $\{X,Y\}$. למכונה שישה מצבים:

t_0 – מצב התחלתי ומצב תחילת כל שלב.

t_1 – בחלק השמאלי סומנה a.

t_2 – בחלק השמאלי סומנה b.

t_3 – זוהה קצה ימני של החלק הלא מסומן והוא צריך להיות a.

t_4 – זוהה קצה ימני של החלק הלא מסומן והוא צריך להיות b.

t_5 – חזרה אחורה בסיום שלב.

t_6 – מצב מקבל.

אלו המעברים:

(t_0, a, t_1, a) (ימין, a, t_1 , a)	קריאת האות הראשונה במילה, a –
(t_0, b, t_2, b) (ימין, b, t_2 , b)	קריאת האות הראשונה במילה, b –
(t_0, Y, t_6, Y) (ימין, Y, t_6 , Y)	זיהוי סיום מוצלח של התהליך
(t_1, a, t_1, a) (ימין, a, t_1 , a)	סריקת המילה עד האחרונה שעדיין לא סומנה בחלק הימני –
(t_1, b, t_2, b) (ימין, b, t_2 , b)	
(t_2, a, t_1, b) (ימין, a, t_1 , b)	
(t_2, b, t_2, b) (ימין, b, t_2 , b)	
$(t_1, \Delta, t_3, \Delta)$ (שמאל, Δ , t_3 , Δ)	זיהוי קצה ימני לא מסומן –
$(t_2, \Delta, t_4, \Delta)$ (שמאל, Δ , t_4 , Δ)	
(t_1, Y, t_3, Y) (שמאל, Y, t_3 , Y)	
(t_2, Y, t_4, Y) (שמאל, Y, t_4 , Y)	
(t_3, a, t_5, Y) (שמאל, a, t_5 , Y)	סימון אות תורנית בקצה הימני –
(t_4, b, t_5, Y) (שמאל, b, t_5 , Y)	
(t_5, a, t_5, a) (שמאל, a, t_5 , a)	חזרה אחורה לחיפוש האות הבאה לסימון בחלק הראשון –
(t_5, b, t_5, b) (שמאל, b, t_5 , b)	
(t_5, X, t_0, X) (ימין, X, t_0 , X)	הכנה לקראת שלב סימון חדש –
$(t_0, \Delta, p_6, \Delta)$ (ימין, Δ , p_6 , Δ)	לקבלת המילה הריקה –

גם במקרה זה אפשר להפוך את t_0 למצב מקבל, ולוותר על המעבר האחרון.

כדי ליצור משתי הת-מכונות מכונה אחת, נוסיף מצב התחלתי חדש q_0 . נוסיף את המעברים הבאים:

(ימין, X, p_2, a, q_0)

– ניחוש כי המילה מהצורה $w \cdot w$

(ימין, X, p_3, b, q_0)

(ימין, a, t_1, a, q_0)

– ניחוש כי המילה מהצורה $w \cdot R(w)$

(ימין, b, t_2, b, q_0)

המצב החדש יהיה מצב מקבל, כדי לקבל את המילה הריקה (אפשר כמובן, במקום זאת להוסיף את המעבר (ימין, Δ, p_8, Δ, p_0) או המעבר (ימין, Δ, p_6, Δ, t_0)). כעת המצב p_0 הופך להיות לא נגיש ואפשר למחוק אותו ואת המעברים היוצאים ממנו. שימו לב, לא ניתן למחוק את t_0 משום שיש מעברים שחוזרים אליו. אבל, ניתן להוריד מהמכונה השנייה את המעבר האחרון, המטפל במילה הריקה. ניתן גם לאחד את שני המצבים המקבלים (p_8 ו- t_0) למצב מקבל אחד, אך אין זה הכרחי.

שאלה 7 (לאה יעקובוביץ)

בנה מכונת טיורינג המקבלת את שפת כל הפלינדרומים באורך זוגי מעל הא"ב $\{a,b,c\}$.

פתרון

השפה המבוקשת היא בדיוק שפת כל המילים מהצורה $w \cdot R(w)$ מעל הא"ב $\{a,b,c\}$. בשאלה 6 דנו בתת-שפה שהיא דומה מאוד לשפה זו (שפת כל המילים מעל הא"ב $\{a,b\}$ מהצורה $w \cdot R(w)$) ובנינו עבורה מכונת טיורינג.

יש לערוך במכונה את ההתאמות הבאות: א"ב הקלט יהיה כמובן $\{a,b,c\}$ במקום $\{a,b\}$. יש להוסיף מצב המקביל ל- t_1 ו- t_2 וייתייחס לאות c , יש להוסיף מצב המקביל ל- t_3 ו- t_4 וייתייחס לאות c . בהתאם יש להרחיב את קבוצת המעברים כך שתתייחס גם לשני המצבים החדשים ולאות c . לא נפרט את המכונה המתאימה.

שאלה 8 (דורון זוהר)

בנה מכונת טיורינג המקבלת כקלט שני מספרים חיוביים $a, b > 0$, הכתובים באונרית ונותנת כפלט את הערך $2a+b$. על המכונה לעבוד לפי מוסכמות הכתיבה שתוארו בחומר הלימוד.

פתרון

המכונה תעבוד עפ"י האלגוריתם הבא. ראשית היא תסמן \$ במילת הפלט. עתה, על כל 1 בנתון הקלט הראשון היא תרשום שתי אותיות 1 בפלט. לאחר מכן, על כל אות 1 בנתון הקלט השני היא תוסיף אות 1 אחת בפלט. לבסוף תסיים בכתיבת \$ נוסף במילת הפלט.

א"ב הקלט הוא $\{1, \#\}$. א"ב המכונה הוא $\{X, Y, \$, 1\}$. למכונה תשעה מצבים:

q_0 – מצב התחלתי.

q_1 – מצב בו המכונה מחפשת תא ריק ראשון לכתיבת \$.

q_2 – מצב סריקה אחורה לחיפוש האות הבאה לסימון בנתון הקלט הראשון.

- q₃ – המכונה מצפה לראות את האות הבאה לסימון בנתון הקלט הראשון או סימן חוצץ.
- q₄ – סומנה אות בנתון הקלט הראשון ויש להגיע למילת הפלט ולכתוב בה 11.
- q₅ – סומנה אות בנתון הקלט הראשון, נכתבה אות 1 במילת הפלט ויש לכתוב עוד אות 1.
- q₆ – המכונה מצפה לראות את האות הראשונה לסימון בנתון הקלט השני.
- q₇ – המכונה מצפה לראות את האות הבאה לסימון (שנייה ויותר) בנתון הקלט השני.
- q₈ – סומנה אות בנתון הקלט השני ויש להגיע למילת הפלט ולכתוב בה 1.
- q₉ – מצב סריקה אחורה לחיפוש האות הבאה לסימון בנתון הקלט השני.
- q₁₀ – הסתיימה קריאת הנתון השני, יש לכתוב \$ שני במילת הפלט.
- q₁₁ – מצב מקבל.

המעברים:

- סריקה ימינה עד התא הריק הראשון – (ימין, 1, q₁, 1, q₀)
- סריקה ימינה עד התא הריק הראשון – (ימין, #, q₁, #, q₁)
- סריקה ימינה עד התא הריק הראשון – (שמאל, \$, q₂, \$, q₁, Δ, q₁)
- סריקה שמאלה עד האות הבאה לסימון בנתון הראשון – (שמאל, 1, q₂, 1, q₂)
- סריקה ימינה עד התא הריק הראשון – (שמאל, \$, q₂, \$, q₂)
- סריקה ימינה עד התא הריק הראשון – (שמאל, #, q₂, #, q₂)
- זיהוי האות האחרונה שסומנה בנתון הראשון – (ימין, X, q₃, X, q₂)
- זיהוי קצה הסרט (לפני סימון האות הראשונה בנתון הראשון) – (ימין, †, q₃, †, q₂)
- סימון אות 1 תורנית בנתון הראשון – (ימין, 1, q₄, X, q₃)
- סריקה ימינה עד התא הריק הראשון – (ימין, 1, q₄, 1, q₄)
- סריקה ימינה עד התא הריק הראשון – (ימין, #, q₄, #, q₄)
- סריקה ימינה עד התא הריק הראשון – (ימין, \$, q₄, \$, q₄)
- סריקה ימינה עד התא הריק הראשון – (ימין, Δ, q₅, 1, q₄)
- סריקה ימינה עד התא הריק הראשון – (שמאל, 1, q₂, Δ, q₅)
- סריקה ימינה עד התא הריק הראשון – (ימין, #, q₆, #, q₃)
- סריקה ימינה עד התא הריק הראשון – (ימין, Y, q₈, 1, q₆)
- סריקה ימינה עד התא הריק הראשון – (ימין, 1, q₈, 1, q₈)
- סריקה ימינה עד התא הריק הראשון – (ימין, \$, q₈, \$, q₈)
- סימון 1 במילת הפלט – (שמאל, 1, q₉, Δ, q₈)
- סריקה שמאלה עד האות הבאה לסימון בנתון השני – (שמאל, 1, q₉, 1, q₉)
- סריקה ימינה עד התא הריק הראשון – (שמאל, \$, q₉, \$, q₉)
- זיהוי האות האחרונה שסומנה בנתון השני – (ימין, Y, q₇, Y, q₉)
- סומנה אות שנייה ויותר בנתון השני – (ימין, Y, q₈, 1, q₇)

הסתיים הנתון השני. סריקה ימינה עד כתיבת \$ שני במילת הפלט – (ימין, \$, q₁₀, \$, q₇)

(ימין, 1, q₁₀, 1, q₁₀)

סיום כתיבת מילת הפלט – (ימין, \$, q₁₁, Δ, q₁₀)

נשים לב שבמקרה זה הדרישה $a, b > 0$ (ולא $a, b \geq 0$) חייבה הוספת מצבים. אחרת ניתן היה לאחד את q_0 ו- q_1 ואת q_6 ו- q_7 .

שאלה 9 (דגנית מורן)

בנה מכונת טיורינג המקבלת כקלט מספר שלם $x > 0$ הכתוב באונרית, ומחשבת את הפונקציה:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ זוגי} \\ 0 & x \text{ אי-זוגי} \end{cases}$$

פתרון

המכונה תעבוד על פי האלגוריתם הבא: במקום האות הראשונה במילת הקלט תכתוב את סימן ה-\$ הפותח את מילת הפלט. כעת תמחק את כל שאר אותיות מילת הקלט, תוך מעקב אחר זוגיות מספר האותיות שקראה. אם כאשר הסתיימה המילה נקרא מספר אי-זוגי של אותיות תחזור אחורה ותכתוב סימן \$ נוסף מימין לסימן ה-\$ הראשון. אם נקרא מספר זוגי של אותיות תחזור אחורה ומימין לסימן ה-\$ הראשון תכתוב אות 1 ואחריה סימן \$ נוסף.

א"ב הקלט הוא כמובן {1}. א"ב המכונה הוא {1, \$}. למכונה שמונה מצבים:

q₀ – מצב התחלתי.

q₁ – זוכר כי נכתב סימן \$ ראשון וכי נקרא מספר אי-זוגי של אותיות 1.

q₂ – זוכר כי נכתב סימן \$ ראשון וכי נקרא מספר זוגי של אותיות 1.

q₃ – זוכר כי הסתיימה מילת הקלט והיא מייצגת מספר זוגי.

q₄ – זוכר כי הסתיימה מילת הקלט והיא מייצגת מספר אי-זוגי.

q₅ – זוכר כי הסתיימה מילת הקלט, היא מייצגת מספר זוגי ובתא הנוכחי יש לכתוב 1.

q₆ – זוכר כי יש עוד לכתוב סימן \$ לסגירת מילת הפלט.

q₇ – מצב מקבל.

נתאר את המכונה בצורה גרפית.

