

החומרים שלפניכם הוכנו על-ידי מורים מובילים שהשתתפו בקורס תשס"ג, בהנחיית ד"ר מיכל ארמוני מהאוניברסיטה הפתוחה. ניתן להשתמש בחומרים לצורך הוראה אבל אסור לעשות בהם כל שימוש מסחרי ללא קבלת אישור מראש מהמחברים.

תכונות סגירות של שפות רגולריות

שאלה 1 (איריס ברגורי)

תהינה L_1 ו- L_2 שפות מעל הא"ב $\{0,1\}$. תהי $L_2 - L_1$ שפת כל המילים השייכות ל- L_2 אך אינן שייכות ל- L_1 . הוכח או הפרך (על ידי דוגמה נגדית) את הטענה הבאה: אם L_1 ו- $L_2 - L_1$ רגולריות, אז L_2 רגולרית.

פתרון

הטענה אינה נכונה.

דוגמה נגדית: L_1 היא שפת כל המילים שאורכן גדול מ-3. $L_2 = \{a^n b^n \mid n > 0\}$. L_1 היא רגולרית (להוכחה מלאה יש כמובן להראות אוטומט סופי שמקבל את L_1).

$$\begin{aligned} L_2 - L_1 &= \{a^n b^n \mid n > 0, 2n < 3\} \\ &= \{a^n b^n \mid n = 1\} \end{aligned}$$

כלומר, $L_2 - L_1$ היא שפה סופית (שמכילה בדיוק מילה אחת) ולכן רגולרית. אבל ידוע כי L_2 אינה רגולרית.

שאלה 2 (איריס ברגורי)

נתונות השפות הבאות מעל הא"ב $\{a,b\}$:

$$L_1 = \{a^n b^m \mid n, m \geq 1\}$$

$$L_2 = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$$

$$L_3 = \{a^n b^m \mid n, m \geq 1, n \neq m\}$$

א. הגדר את השפה L_2 בעזרת L_1 ו- L_3 , תוך שימוש בפעולות איחוד, חיתוך, משלים, שרשור והיפוך (חלק מהפעולות או כולן).

ב. נתון כי L_1 רגולרית ו- L_2 אינה רגולרית. בהסתמך על הנתון, על סעיף א' ועל תכונות הסגירות של משפחת השפות הרגולריות, הוכח כי L_3 אינה רגולרית.

פתרון

א. $L_2 = L_1 - L_3 = L_1 \cap \overline{L_3}$

ב. נניח בשלילה כי L_3 רגולרית. מסגירות משפחת השפות הרגולריות לפעולת המשלים נובע כי גם $\overline{L_3}$ רגולרית. מהנתון (L_1 רגולרית) ומסגירות משפחת השפות הרגולריות לחיתוך נובע כי גם $L_1 \cap \overline{L_3}$ רגולרית. אבל $L_2 = L_1 \cap \overline{L_3}$ ('ע"פ סעיף א') ולכן קיבלנו כי L_2 רגולרית, בסתירה לנתון. לכן, ההנחה היתה שגויה ו- L_3 אינה רגולרית.

שאלה 3 (ויקטוריה צורי)

תהי L שפת כל המילים מעל הא"ב $\{0,1,2\}$, שמתחילות במספר כלשהו (גדול ממש מ-0) של אפסים ואין בהן שתי אותיות 1 צמודות. האם L רגולרית? הוכח את תשובתך.

פתרון

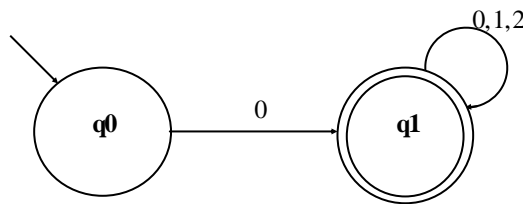
קל יותר לפתור שאלה זו בעזרת פירוק לשפות פשוטות יותר ושימוש בתכונות סגירות, אך גם פתרון ישיר, על ידי בניית אוטומט הוא אפשרי. בפתרון ישיר לעיתים קרובות תלמידים שוכחים לטפל באות 2.

ניתן לפרק את L כך: $L = L_1 \cap \overline{L_2}$, L_1 ו- L_2 מעל הא"ב $\{0,1,2\}$:

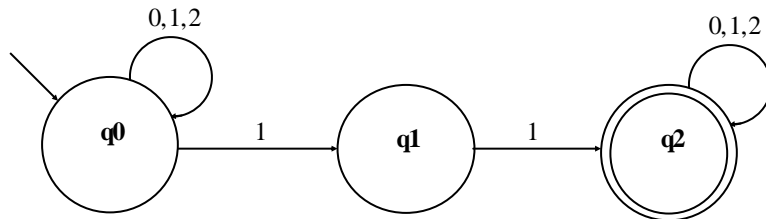
$$L_1 = \{w \mid w \text{ מתחילה ברצף לא ריק של אפסים}\}$$

$$L_2 = \{w \mid w \text{ מכילה רצף 11}\}$$

L_1 רגולרית – הנה אוטומט שמקבל אותה (אוטומט דטרמיניסטי לא מלא)



L_2 רגולרית – הנה אוטומט שמקבל אותה (אוטומט לא דטרמיניסטי):



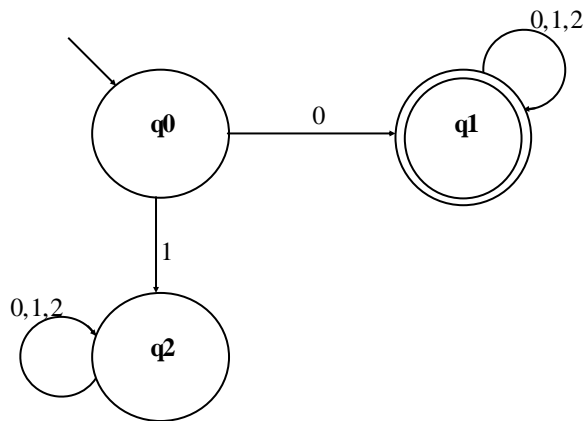
מסגירות משפחת השפות הרגולריות לפעולת המשלים גם $\overline{L_2}$ רגולרית,

ומסגירות משפחת השפות הרגולריות לפעולת החיתוך גם $L = L_1 \cap \overline{L_2}$ רגולרית.

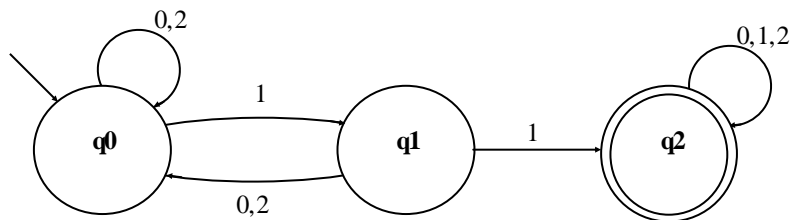
הערה: אם השאלה ניתנת לפני הוראת פרק 4, יש כמובן לתת אוטומטים דטרמיניסטיים להוכחת רגולריות

L_1 ו- L_2 .

הנה אוטומט מתאים עבור L_1 :



והנה אוטומט מתאים עבור L_2 :



שאלה 4 (ויקטוריה צורי)

נתבונן בשפה מעל הא"ב $\{a,b,c\}$ המכילה את כל המילים שאורכן אי-זוגי והן מקיימות לפחות אחד משני התנאים הבאים:

1. מתחילות ומסתיימות באותה אות.
 2. מכילות את הרצף aa.
- האם השפה רגולרית? הוכח את תשובתך.

פתרון

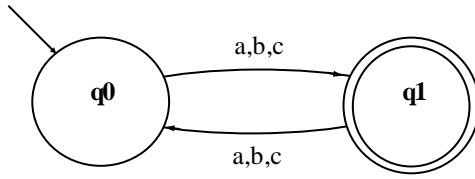
פתרון ישיר ללא שימוש בפירוק (ע"י בניית אוטומט סופי המקבל את השפה) אינו פשוט, אך ניתן להגיע לפתרון בעל מורכבות טכנית נמוכה ע"י שימוש בפירוק הבא: $L = L_1 \cap (L_2 \cup L_3)$ כאשר L_1, L_2, L_3 מעל $\{a,b,c\}$:

$$L_1 = \{w \mid w \text{ באורך אי-זוגי}\}$$

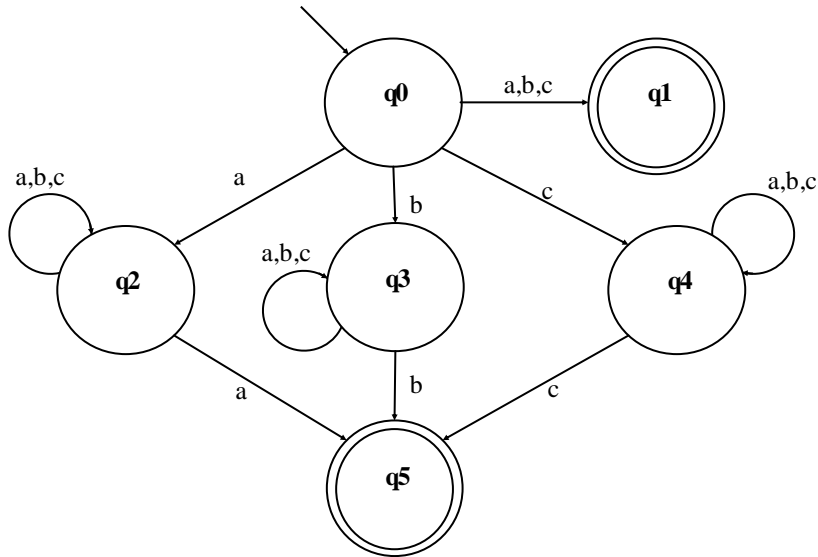
$$L_2 = \{w \mid w \text{ מתחילה ומסתיימת באותה אות}\}$$

$$L_3 = \{w \mid w \text{ מכילה את הרצף aa}\}$$

הנה אוטומט סופי שמקבל את L_1 :



הנה אוטומט סופי שמקבל את L_2 :

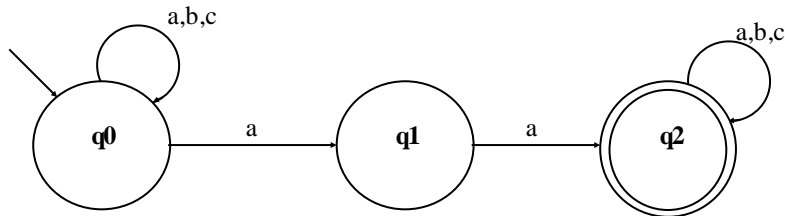


זהו אוטומט סופי לא דטרמיניסטי.

אוטומט דטרמיניסטי עבור שפה זו הוא מורכב למדי, ולכן שאלה זו טובה כדי לעודד שימוש באי-דטרמיניזם (ומתאימה אחרי סיום תהליך ההוראה של פרק 4).

q_1 מטפל במקרה המיוחד שהמילה בת אות אחת – כלומר האות המתחילה היא גם האות המסיימת (כמובן, אפשר לאחד את q_1 ו- q_5).

הנה אוטומט סופי שמקבל את L_3 :



לכן L_1, L_2 ו- L_3 הן שפות רגולריות.

מסגירות משפחת השפות הרגולריות לפעולת האיחוד גם $L_2 \cup L_3$ רגולרית ומסגירות משפחת השפות

הרגולריות לפעולת החיתוך גם $L_1 \cap (L_2 \cup L_3)$ היא רגולרית.

שאלה זו מתאימה הן לעבודת כיתה, הן לשיעורי בית והן למבחן. המורה יכול/ה להיעזר בה כדי לבדוק את מידת השליטה של התלמידים במנגנון הלא דטרמיניסטי ואת נטייתם לפתרונות המשתמשים בפירוק (לעומת פתרונות ישירים).

שאלה 5 (ויקטוריה צורי)

נתבונן בשפה מעל הא"ב $\{0,1,2\}$, המכילה את כל המילים שמתחילות ברצף 01 או ברצף 10, ומסתיימות ברצף 10 או ברצף 0111. האם השפה היא רגולרית? הוכח את תשובתך.

פתרון

פתרון ישיר שאינו משתמש בפירוק אינו פשוט, כי קל לשכוח מילים כמו 10, 0111 או 10111 שהן בשפה ומקיימות תנאים בחפיפה. כמובן, כאשר מפרקים את השפה לשפות פשוטות, ההתמודדות היא עם כל תנאי בנפרד ואין צורך לחשוב על שילוב התנאים.

השאלה מתאימה אחרי סיום תהליך ההוראה של פרק 4, כי שימוש באי-דטרמיניזם מפשט באופן משמעותי את המורכבות הטכנית של הפתרון, ובנוסף, אז ניתן להשתמש בפעולת ההיפוך. ניתן להציג את השפה באופן הבא, כאשר L_1, L_2 ו- L_3 הן מעל הא"ב $\{0,1,2\}$.

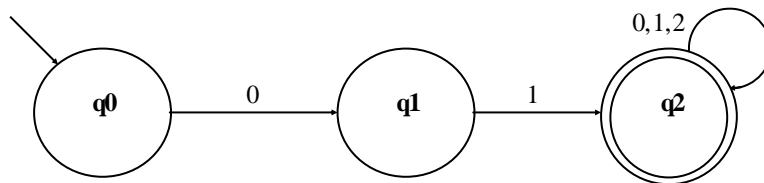
$$(L_1 \cup L_2) \cap (R(L_1) \cup L_3)$$

$$L_1 = \{w \mid w \text{ מתחילה ב-} 01\}$$

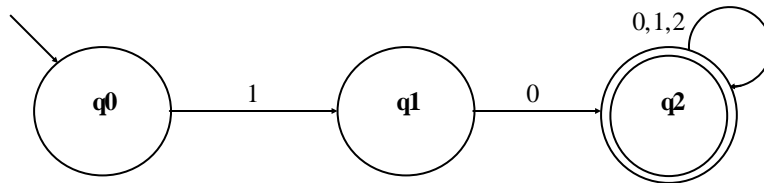
$$L_2 = \{w \mid w \text{ מתחילה ב-} 10\}$$

$$L_3 = \{w \mid w \text{ מסתיימת ב-} 0111\}$$

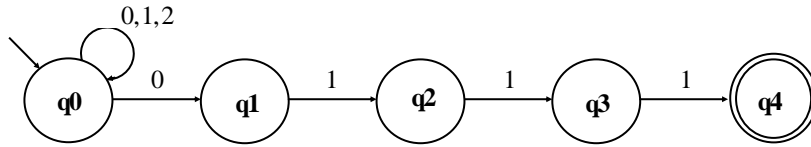
L_1 היא רגולרית – הנה אוטומט סופי המקבל אותה:



L_2 היא רגולרית – הנה אוטומט סופי המקבל אותה:



L_3 היא רגולרית – הנה אוטומט סופי המקבל אותה:



מסגירות משפחת השפות הרגולריות לפעולת ההיפוך גם $R(L_1)$ רגולרית.
 מסגירות משפחת השפות הרגולריות לפעולת האיחוד גם $L_1 \cup L_2$ ו- $L_3 \cup R(L_1)$ רגולריות, ומסגירות
 משפחת השפות הרגולריות לפעולת החיתוך גם $(L_1 \cup L_2) \cap (R(L_1) \cup L_3)$ רגולרית.

שאלה 6 (ריקה רם)

תהי L שפת כל המילים מעל הא"ב $\{a,b,c\}$ שאורכן לפחות 6, ובין 3 האותיות בהן מתחילה המילה אין שתי אותיות זהות ובין 3 האותיות בהן מסתיימת המילה אין שתי אותיות זהות. האם שפה זו רגולרית? הוכיחו את תשובתכם.

פתרון

ניתן להגדיר את L בעזרת שתי השפות הבאות:

L_1 היא שפת כל המילים מעל הא"ב $\{a,b,c\}$ שאורכן בדיוק 3 ואין בהן שתי אותיות זהות.

L_2 היא שפת כל המילים מעל הא"ב $\{a,b,c\}$.

L_1 היא סופית ולכן רגולרית. L_2 אף היא רגולרית (מוכח בספר לתלמיד).

$L = L_1 \cdot L_2 \cdot L_1$. מסגירות משפחת השפות הרגולריות לשרשור גם $L_1 \cdot L_2$ רגולרית ולכן גם

$L = (L_1 \cdot L_2) \cdot L_1$ רגולרית.

שאלה זו מדגימה יפה כי השימוש בפירוק יכול להפחית בצורה משמעותית את המורכבות הטכנית של הפתרון, ובמקרה זה אפילו אין צורך לבנות אוטומט, בעוד שבניית אוטומט ישיר לשפה כלל אינה טריוויאלית.

שאלה 7 (אסנת אגנלמן, אסתי מאסטרסאי, אורנה שטיין)

הוכח ששפת כל המילים מעל הא"ב $\{0,1,2,\dots,9\}$ המייצגות מספרים שמתחלקים ב-12 ללא שארית היא שפה רגולרית.

פתרון

השפה הנתונה ניתנת לפירוק באופן הבא: $L_1 \cap L_2$

כאשר L_1 היא שפת כל המילים מעל הא"ב $\{0,1,2,\dots,9\}$ המייצגות מספרים שמתחלקים ב-4 ללא

שארית ו- L_2 היא שפת כל המילים מעל הא"ב $\{0,1,2,\dots,9\}$ המייצגות מספרים שמתחלקים ב-3 ללא

שארית.

L_1 ו- L_2 הן שפות רגולריות. אוטומט סופי המקבל את L_1 נתון באיור 2.13 ג' בספר לתלמיד. אוטומט

עבור L_2 פועל ע"פ עקרון דומה. יש לו חמישה מצבים:

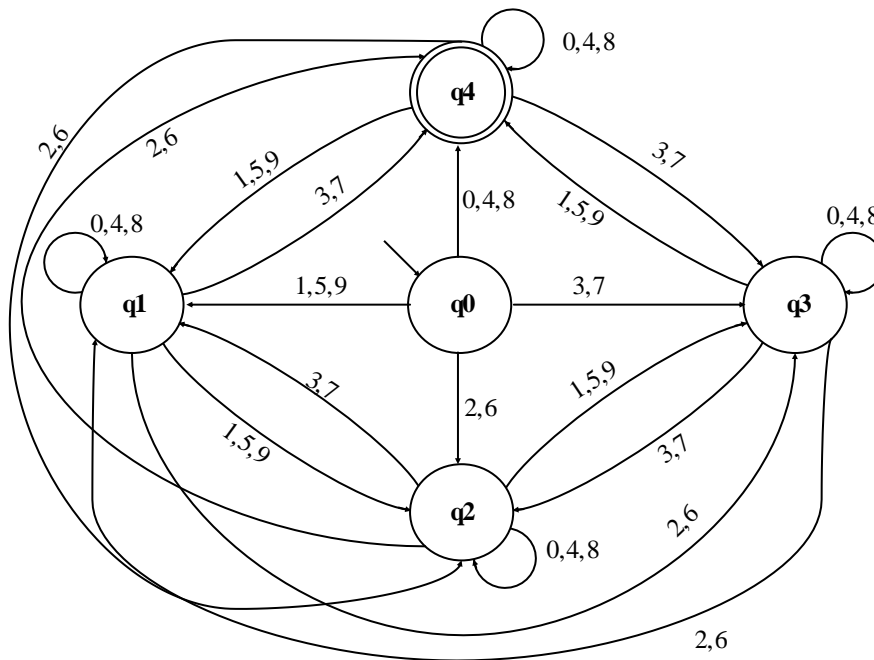
q_0 – מצב התחלתי.

q_1 – זוכר שארית 1 בחלוקה ב-4.

q_2 – זוכר שארית 2 בחלוקה ב-4.

q_3 – זוכר שארית 3 בחלוקה ב-4.

q_4 – מצב מקבל, זוכר שארית 0 בחלוקה ב-4.



אפשר, כמובן, להגדיר שפות נוספות על אותו עקרון – כמו שפת כל המילים מעל הא"ב $\{0,1,2,\dots,9\}$ המייצגות מספר שמתחלק ב-20 ולהשתמש במקרה זה בשפת כל המילים מעל הא"ב הזה המייצגות מספר שמתחלק ב-5 ושפת כל המילים מעל הא"ב הזה המייצגות מספר שמתחלק ב-4.

שאלה 8 (אסנת אנגלמן, אסתי מאסטרסי ואורנה שטיין)

הוכח כי שפת כל המילים מעל הא"ב $\{a,b,c\}$ שאינן מכילות רצף של שתי אותיות זהות היא רגולרית.

פתרון

ניתן לייצג את השפה בעזרת שלוש השפות הבאות, כולן מעל הא"ב $\{a,b,c\}$:

L_1 היא שפת כל המילים שמכילות את הרצף aa.

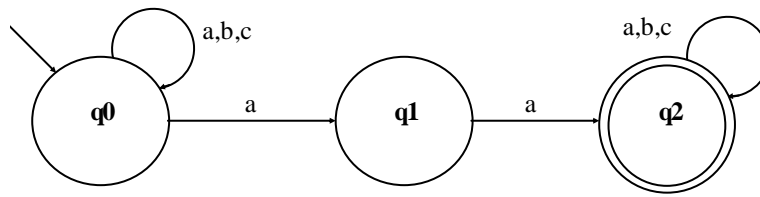
L_2 היא שפת כל המילים שמכילות את הרצף bb.

L_3 היא שפת כל המילים שמכילות את הרצף cc.

השפה הנדונה היא $\overline{L_1} \cap \overline{L_2} \cap \overline{L_3}$

(וניתן להציגה גם כ- $\overline{(L_1 \cup L_2 \cup L_3)}$).

L_1 היא רגולרית. הנה אוטומט סופי שמקבל אותה (לא דטרמיניסטי).



אוטומטים דומים מקבלים את L_2 ו- L_3 . עבור L_2 נחליף את a במעברים מ- q_0 ל- q_1 ומ- q_1 ל- q_2 ב-b, ועבור L_3 נחליף את a במעברים האלו ב-c. לכן גם L_2 ו- L_3 רגולריות. בייצוג הראשון מקבלים כי השפה הנדונה רגולרית ע"י שימוש שלוש פעמים בתכונת הסגירות של השפות הרגולריות לפעולת המשלים, ופעמיים שימוש בתכונת הסגירות של השפות הרגולריות לפעולת החיתוך. בייצוג השני מקבלים כי השפה הנדונה רגולרית ע"י שימוש פעמיים בתכונת הסגירות של השפות הרגולריות לפעולת האיחוד ופעם אחת שימוש בתכונת הסגירות של השפות הרגולריות לפעולת המשלים.

שאלה 9 (אסנת אנגלמן, אסתי מאסטראסי, ואורנה שטיין)

האם השפה $L = \{(010)^n(001)^m \mid n, m \geq 0\}$ היא רגולרית? הוכח את תשובתך.

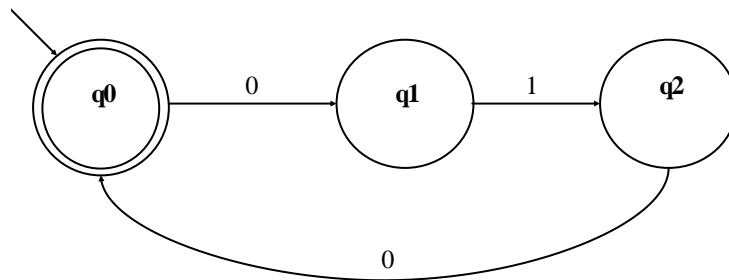
פתרון

$$L = L_1 \cdot L_2$$

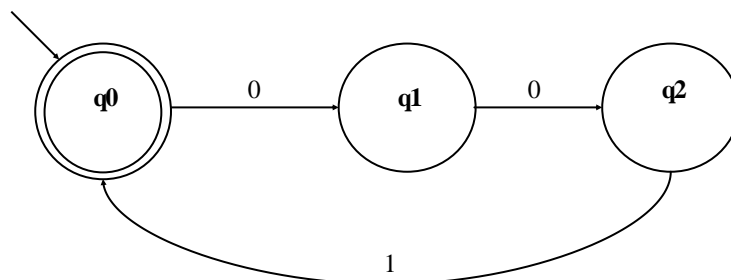
$$L_1 = \{(010)^n \mid n \geq 0\} \text{ כאשר}$$

$$L_2 = \{(001)^m \mid m \geq 0\}$$

L_1 רגולרית – הנה אוטומט סופי שמקבל אותה (לא מלא):



בדומה גם L_2 רגולרית – הנה אוטומט סופי לא מלא שמקבל אותה:



מסגירות משפחת השפות הרגולריות לשרשור גם $L = L_1 \cdot L_2$ רגולרית.

שאלה 10 (אסנת אנגלמן, אסתי מאסטראסי, אורנה שטיין)

היה L שפת כל המילים מעל הא"ב $\{a,b\}$ המתחילות ברצף לא ריק של אותיות a ומסתיימות ברצף אותיות b שארוך מהרצף הפותח או שהן מורכבות מחזרה מספר כלשהו (גדול מ-0) של פעמים על הרצף ab . האם L רגולרית? הוכח את תשובתך.

פתרון

ניתן להציג את L באופן הבא: $L = L_1 \cup L_2$.

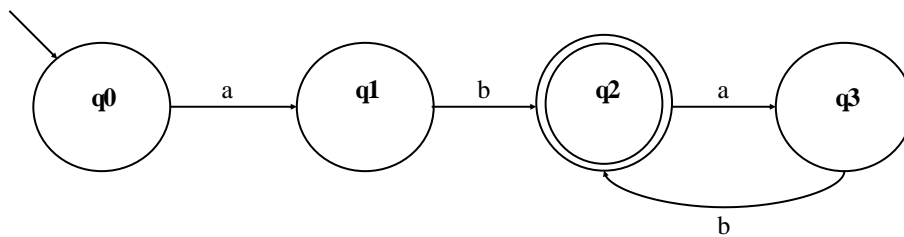
L_1 מעל הא"ב $\{a,b\}$:

$L_1 = \{a^n w b^m \mid m > n > 0, \{a,b\} \text{ מעל } w\}$

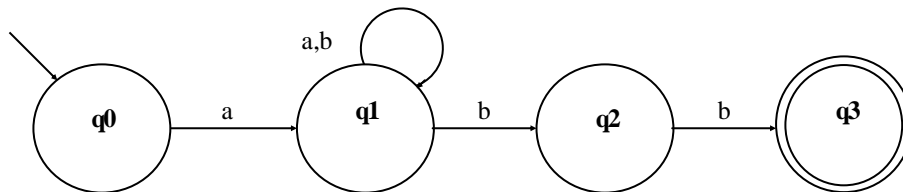
L_2 מעל הא"ב $\{a,b\}$:

$L_2 = \{(ab)^j \mid j > 0\}$

L_2 רגולרית. הנה אוטומט סופי שמקבל אותה:



L_1 אף היא רגולרית. נשים לב כי למעשה משמעות הדרישה היא שהמילה תתחיל באות a ותסתיים ב-2 אותיות b . אם המילה מתחילה ביותר מאות a אחת ניתן לצרף את האותיות העודפות לתוך המילה w וכך בכל מקרה לא מופר התנאי $m > n$. לכן אוטומט מתאים הוא האוטומט הלא דטרמיניסטי הבא:



מסגירות משפחת השפות הרגולריות לפעולת האיחוד גם L רגולרית.

ניתן גם לפרק את L_1 לחיתוך שפת כל המילים המתחילות ב- a ושפת כל המילים המסתיימות ב- bb . נשים לב כי אם היינו רוצים להחליף את התנאי הראשון בדרישה חזקה יותר, לפיה הרצף הפותח של המילה כולל את כל האותיות a עד האות הראשונה שאינה a , ובדומה הרצף הסוגר כולל את כל האותיות

b מהאות האחרונה במילה שאינה b ועד לסוף המילה, הרי השפה המושרית על ידי דרישה זו היא כמובן שונה. במקרה זה השפה היא

$$L'_1 = \{a^n w b^m \mid m > n > 0, b\text{-אינה מתחילה ב-} a, \{a, b\} \text{ מעל } w\}$$

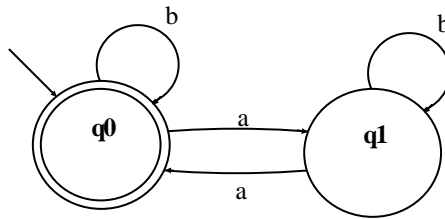
וזו שפה חופשית הקשר, שאינה רגולרית.

שאלה 11 (לאה יעקובוביץ)

תהי L שפת כל המילים מעל הא"ב {a,b} שבהן השארית של מספר האותיות a מחולק ב-2 שווה לשארית של מספר האותיות b מחולק ב-2. האם L רגולרית? הוכח את תשובתך.

פתרון

תרגיל זה דומה מאוד לשאלה 2 בבעיות המשולבות (השאלה של אלה פוק). L היא למעשה השפה $(L_1 \cap L_2) \cup (\overline{L_1} \cap \overline{L_2})$ כאשר L_1 היא שפת כל המילים מעל הא"ב {a,b} בהן מספר האותיות a זוגי ו- L_2 היא שפת כל המילים מעל הא"ב {a,b} בהן מספר האותיות b זוגי. L_1 רגולרית. הנה אוטומט סופי שמקבל אותה:



L_2 רגולרית כי אוטומט שמקבל אותה מתקבל מהאוטומט האחרון ע"י החלפת כל a ב-b וכל b ב-a. מסגירות משפחת השפות הרגולריות לפעולת המשלים. גם $\overline{L_1}$ ו- $\overline{L_2}$ רגולריות. מסגירות משפחת השפות הרגולריות לפעולת החיתוך גם $L_1 \cap L_2$ ו- $\overline{L_1} \cap \overline{L_2}$ רגולריות ומסגירות משפחת השפות הרגולריות לפעולת האיחוד גם L רגולרית. ניתן כמובן להוכיח ש-L רגולרית ע"י בנייה ישירה של אוטומט. במקרה זה מדובר באוטומט בן 4 מצבים (עבור כל צירוף של זוגיות מספר אותיות a וזוגיות מספר אותיות b)

שאלה 12 (דורון זוהר)

א. נתונות שתי שפות מעל הא"ב {a,b,c}:

L_1 היא שפת כל המילים המתחילות ב-a.

L_2 היא שפת כל המילים המתחילות ב-b.

נתון כי L_1 ו- L_2 רגולריות. הוכח, תוך שימוש בנתון ובתכונות סגירות, כי L_3 אף היא רגולרית,

כאשר L_3 היא שפת כל המילים מעל הא"ב {a,b,c} המתחילות ב-c.

ב. לפניך הגדרות שונות של L_3 בעזרת L_1 ו- L_2 אשר הוצעו ע"י תלמידים תוך ניסיון לפתור את סעיף א'. לכל הגדרה קבע אם היא נכונה או שגויה, ואם היא שגויה (כלומר אינה שווה ל- L_3) כתוב איזו שפה היא יוצרת.

- | | |
|--|-----|
| $\overline{L_1} \cap \overline{L_2}$ | I |
| $\overline{(L_1 \cap L_2)}$ | II |
| $\overline{(L_1 \cup L_2 \cup \{\varepsilon\})}$ | III |
| $\overline{L_1} \cup \overline{L_2}$ | IV |
| $L_1 \cap L_2$ | V |

פתרון

סעיף א' של השאלה מתאים כשיעורי בית או כשאלה בבחינה. כדאי להפריד ממנו את סעיף ב' ולתת אותו אח"כ כבסיס לעבודת כיתה (וכמובן שאם תוך פתרון סעיף א' נתנו התלמידים פירוקים אחרים ל- L_3 כדאי לדון גם בהם).

א. שפת כל המילים המתחילות ב-c מכילה בדיוק את כל המילים שאינן מתחילות ב-a וגם אינן מתחילות ב-b, וגם אינן המילה הריקה. כלומר $L_3 = \overline{L_1} \cap \overline{L_2} \cap \{\varepsilon\}$. מאחר שנתון ש- L_1 ו- L_2 רגולריות, ומאחר ש- $\{\varepsilon\}$ סופית, ולכן גם כן רגולריות, ומאחר שהשפות הרגולריות סגורות לפעולת המשלים הרי שגם $\overline{L_1}$, $\overline{L_2}$ ו- $\{\varepsilon\}$ רגולריות ומסגירות משפחת השפות הרגולריות לפעולת החיתוך גם $\overline{L_1} \cap \overline{L_2}$ רגולרית וגם $L_3 = (\overline{L_1} \cap \overline{L_2}) \cap \{\varepsilon\}$ רגולרית.

ב. I המילים שאינן מתחילות ב-a ואינן מתחילות ב-b הן או המילה הריקה או מילים שמתחילות ב-c, ולכן אין זו השפה המבוקשת (המילה הריקה שייכת לשפה $\overline{L_1} \cap \overline{L_2}$ אך לא לשפה L_3).

II אין מילים ששייכות ל- $L_1 \cap L_2$ משום שאין מילה שגם מתחילה ב-a וגם מתחילה ב-b. לכן $L_1 \cap L_2$ היא השפה הריקה ושפת המשלים שלה היא שפת כל המילים מעל הא"ב $\{a,b,c\}$.

III $L_1 \cup L_2 \cup \{\varepsilon\}$ היא שפת כל המילים שמתחילות ב-a או מתחילות ב-b או שהן המילה הריקה. משלימתה היא לכן שפת כל המילים שמתחילות ב-c כלומר L_3 (כמובן, מכללי דה-מורגן ומסעיף א' ניתן לקבל זאת, אלא שלא כל התלמידים מכירים את כללי דה-מורגן).

IV כל המילים שאינן מתחילות ב-a או שאינן מתחילות ב-b היא שפת כל המילים מעל הא"ב $\{a,b,c\}$, משום שאם מילה מתחילה ב-a אז היא אינה מתחילה ב-b ואם מילה מתחילה ב-b אז היא אינה מתחילה ב-a וכמובן המילה הריקה או מילה שמתחילה ב-c אינה מתחילה ב-a וגם אינה מתחילה ב-b ולכן כל מילה מקיימת לפחות את אחד משני התנאים (שוב ניתן להגיע לכך גם מכללי דה-מורגן וסעיף II).

V כאמור בסעיף II, $L_1 \cap L_2$ היא השפה הריקה \emptyset .

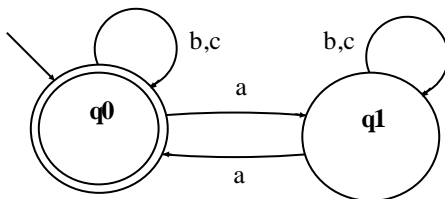
שאלה 13 (דורון זוהר)

נתבונן בשפה מעל הא"ב $\{a,b,c\}$ המכילה את כל המילים הניתנות לחלוקה באופן הבא:
 החלק הראשון מתחיל ברצף ab ואחריו הוא מכיל מספר זוגי של אותיות a או מספר אותיות b המתחלק ב-3 ללא שארית.
 החלק השני מסתיים ברצף $cbba$ ובין שני החלקים מפריד הרצף c^3 .
 האם זו שפה רגולרית? הוכח את תשובתך.

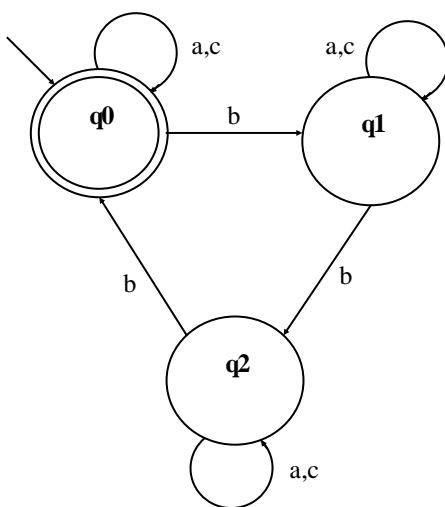
פתרון

ניתן להגדיר את השפה באופן הבא : $(L_1 \cdot (L_2 \cup L_3)) \cdot (L_4 \cdot L_5)$ כאשר L_1 היא השפה $\{ab\}$, L_2 היא שפת כל המילים המכילות מספר זוגי של אותיות a , L_3 היא שפת כל המילים שמספר האותיות b בהן מתחלק ב-3 ללא שארית, L_4 היא השפה $\{c^3\}$ ו- L_5 היא שפת כל המילים שמסתיימות ברצף $cbba$. כל השפות מעל הא"ב $\{a,b,c\}$.
 כל השפות רגולריות. הנה אוטומטים מתאימים עבור L_2 , L_3 ועבור L_5 :

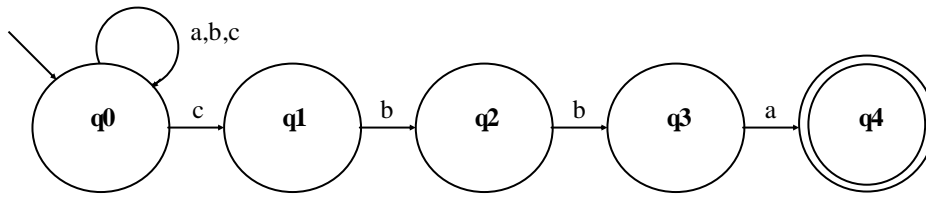
A_2 עבור L_2 :



A_3 עבור L_3 :



A_5 עבור L_5 :



L_1 ו- L_4 סופיות ולכן רגולריות.

מסגירות משפחת השפות הרגולריות לפעולת האיחוד גם $L_2 \cup L_3$ רגולרית.

מסגירות משפחת השפות הרגולריות לפעולת השרשור גם $(L_2 \cup L_3) \cdot L_1$ רגולרית, גם $L_4 \cdot L_5$ רגולרית

וגם $(L_1 \cdot (L_2 \cup L_3) \cdot (L_4 \cdot L_5))$ רגולרית.

שאלה 14 (רחלי צ'רניחוב)

נתונה השפה הבאה מעל הא"ב $\{a,b,c,d\}$:

$$L = \{a^n b^m c^k d^\ell \mid 1 < n < 4, m = 2n, k \bmod 4 = 1, \ell \bmod 2 = 0\}$$

האם L רגולרית? הוכח את תשובתך.

פתרון

ניתן להציג את L בעזרת השפות הבאות מעל הא"ב $\{a,b,c,d\}$:

$$L_1 = \{a^n b^m \mid 1 < n < 4, m = 2n\}$$

$$L_2 = \{c^k \mid k \bmod 4 = 1\}$$

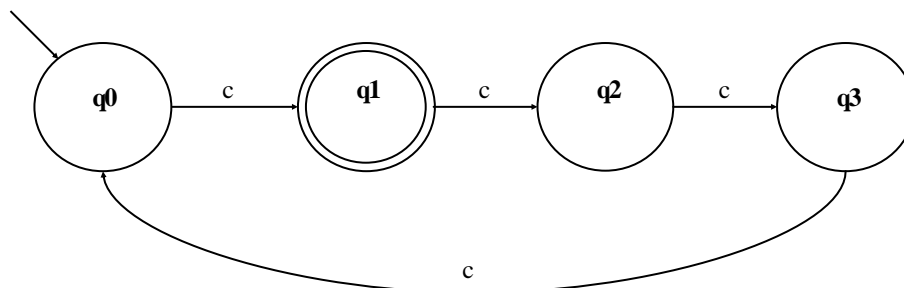
$$L_3 = \{d^\ell \mid \ell \bmod 2 = 0\}$$

$$L = L_1 \cdot (L_2 \cdot L_3)$$

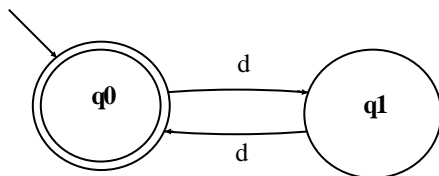
את L_1 אפשר להציג בעזרת שתי השפות $L_4 = \{a^2 b^4\}$ ו- $L_5 = \{a^3 b^6\}$ כך: $L_1 = L_4 \cup L_5$.

L_2 ו- L_3 הן רגולריות, כי הנה אוטומטים מתאימים המקבלים אותן:

A_2 עבור L_2 :



A_3 עבור L_3 :



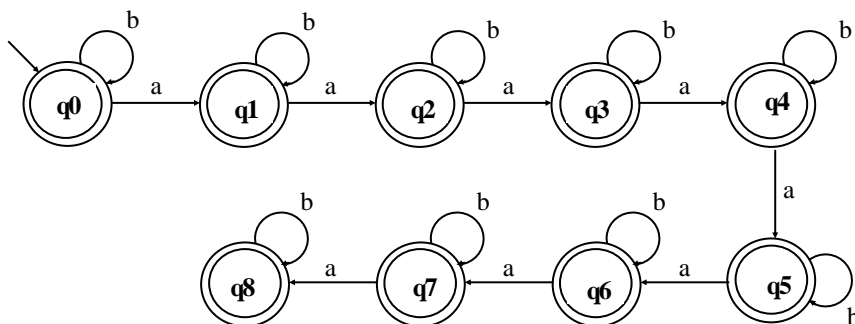
מסגירות משפחת השפות הרגולריות לשרשור גם $L_2 \cdot L_3$ רגולרית.
 L_4 ו- L_5 סופיות ולכן רגולריות ומסגירות משפות השפות הרגולריות לאיחוד גם $L_4 \cup L_5$ רגולרית
 ומסגירות משפות השפות הרגולריות לשרשור גם $(L_4 \cup L_5) \cdot (L_2 \cdot L_3) = L_1 \cdot (L_2 \cdot L_3) = L$ רגולרית.

שאלה 15 (רחלי צ'רניחוב)

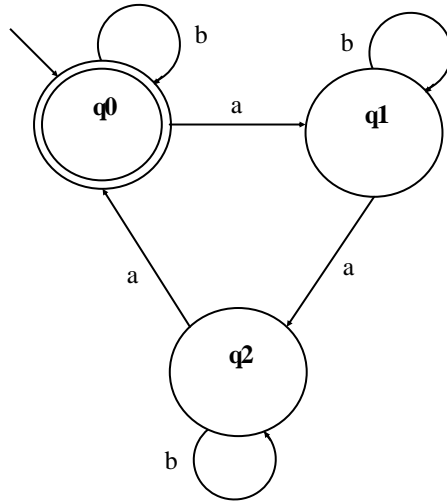
תהי L שפת כל המילים מעל הא"ב $\{a,b\}$ אשר מכילות לכל היותר 9 אותיות a וגם מספר האותיות a בהן מתחלק ב-3. האם L רגולרית? הוכח את תשובתך.

פתרון

$L = L_1 \cap L_2$ כאשר L_1 היא שפת כל המילים מעל הא"ב $\{a,b\}$ אשר מכילות לכל היותר 9 אותיות a ו- L_2 היא שפת כל המילים מעל הא"ב $\{a,b\}$ אשר מספר האותיות a בהן מתחלק ב-3.
 L_1 רגולרית כי הנה אוטומט סופי המקבל אותה:



(לא ניתן להשתמש בנימוק סופיות כי זו לא שפה סופית. למשל, היא מכילה את כל המילים $\{b^i a \mid i \geq 0\}$).
 L_2 רגולרית כי הנה אוטומט סופי שמקבל אותה:



מסגירות משפחת השפות הרגולריות לחיתוך גם $L = L_1 \cup L_2$ רגולרית.

שאלה 16 (רחלי צ'רניחוב)

תהי L שפת כל המילים מעל הא"ב $\{a,b,c\}$ המקיימות לפחות אחד מהתנאים הבאים:

- א. המילה מכילה את הרצף ccb וגם מסתיימת ברצף $ccac$.
 - ב. מספר האותיות b במילה גדול או שווה ל-2 וקטן או שווה ל-5 או שגם מספר האותיות c במילה גדול ממספר האותיות a במילה וגם מספר האותיות c במילה קטן מ-7.
- האם L רגולרית? הוכח את תשובתך.

פתרון

ניתן להציג את L בצורה הבאה:

$$L = (L_1 \cap L_2) \cup (L_3 \cup L_4)$$

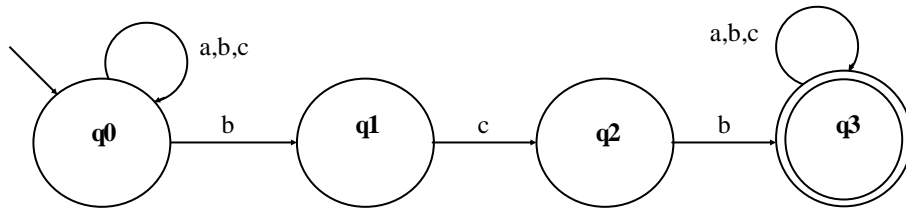
כאשר L_1 היא שפת כל המילים מעל הא"ב $\{a,b,c\}$ שמכילות את הרצף ccb ,

L_2 היא שפת כל המילים מעל הא"ב $\{a,b,c\}$ שמסתיימות ברצף $ccac$,

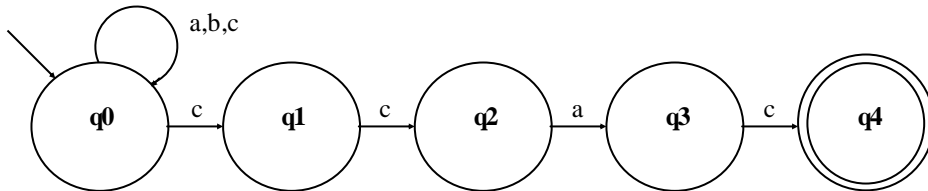
L_3 היא שפת כל המילים מעל הא"ב $\{a,b,c\}$ שמספר האותיות b בהן גדול או שווה ל-2 וקטן או שווה ל-5,

L_4 היא שפת כל המילים מעל הא"ב $\{a,b,c\}$ שבהן מספר האותיות c גדול ממספר האותיות a ומספר האותיות c קטן מ-7.

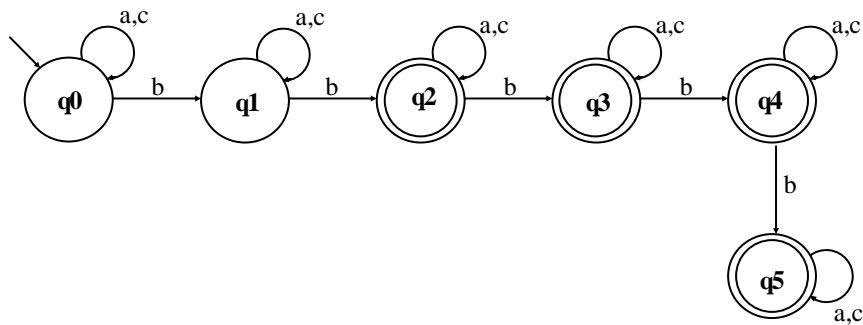
L_1 רגולרית – הנה אוטומט סופי שמקבל אותה:



L_2 רגולרית – הנה אוטומט סופי שמקבל אותה:



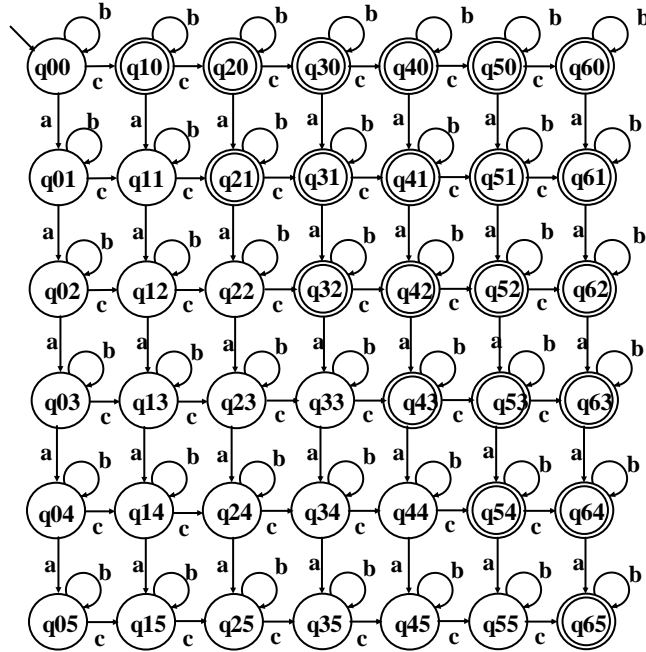
L_3 רגולרית – הנה אוטומט סופי שמקבל אותה:



(ניתן היה גם לפרק את L_3 לשתי שפות רגולריות פשוטות ע"י שימוש בפעולת החיתוך).

L_4 רגולרית – נשים לב ששפה זו היא למעשה השפה הבאה:

שפת כל המילים מעל הא"ב $\{a,b,c\}$ בהן מספר האותיות c הוא לכל היותר 6 ומספר האותיות a קטן ממספר האותיות c .



באוטומט זה המצב q_{ij} מציינ כי נקראו i אותיות c ו- j אותיות a .
 שימו לב – לא ניתן להיעזר בנימוק סופיות כי השפה אינה סופית. בפרט היא מכילה את כל המילים $\{cb^i \mid i \geq 0\}$.

מסגירות משפחת השפות הרגולריות לחיתוך גם $L_1 \cap L_2$ רגולרית.
 מסגירות משפחת השפות הרגולריות לאיחוד גם $L_3 \cup L_4$ וגם $L = (L_1 \cap L_2) \cup (L_3 \cup L_4)$ רגולריות.

שאלה 17 (רחלי צ'רניחוב)

תהי L שפת כל המילים מעל הא"ב $\{a,b,c\}$ המקיימות את כל התנאים הבאים:
 א. ניתן לחלק את המילה לשני חלקים כך שחלקה הראשון מכיל את הרצף bca וחלקה השני מכיל את הרצף acb .
 ב. המילה מכילה את הרצף bb .
 ג. המילה אינה מכילה יותר משלוש אותיות a רצופות.
 האם L רגולרית? הוכח את תשובתך.

פתרון

ניתן לייצג את L בעזרת השפות הבאות, כולן מעל הא"ב $\{a,b,c\}$:

L_1 היא שפת כל המילים שמכילות את הרצף bca .

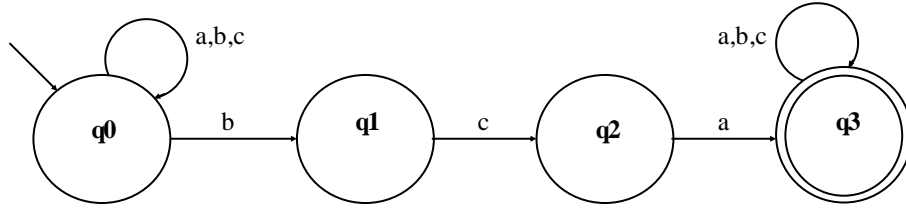
L_2 היא שפת כל המילים שמכילות את הרצף bb .

L_3 היא שפת כל המילים שמכילות את הרצף $aaaa$.

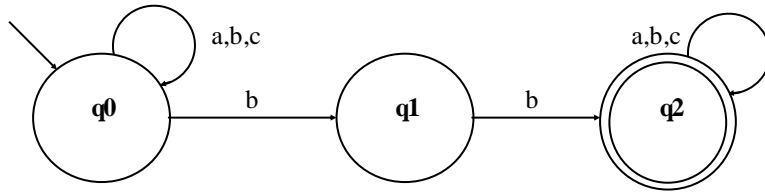
$$L = ((L_1 \cdot R(L_1)) \cap L_2) \cap \overline{L_3}$$

L_1, L_2 ו- L_3 רגולריות:

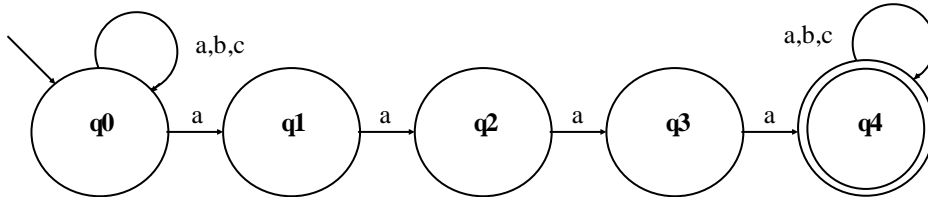
A_1 עבור L_1 :



A_2 עבור L_2 :



A_3 עבור L_3 :



מסגירות משפחת השפות הרגולריות לפעולת ההיפוך גם $R(L_1)$ רגולרית.

מסגירות משפחת השפות הרגולריות לפעולת השרשור גם $L_1 \cdot R(L_1)$ רגולרית.

מסגירות משפחת השפות הרגולריות לפעולת המשלים גם $\overline{L_3}$ רגולרית.

מסגירות משפחת השפות הרגולריות לפעולת החיתוך גם $(L_1 \cdot R(L_1)) \cap L_2$ וגם

$$L = ((L_1 \cdot R(L_1)) \cap L_2) \cap \overline{L_3} \text{ רגולרית.}$$

שאלה 18 (אתי מנשה)

תהי L שפת כל המילים מעל הא"ב $\{a,b\}$ שאינן מתחילות ב- a , מכילות שתי אותיות b ואינן מסתיימות

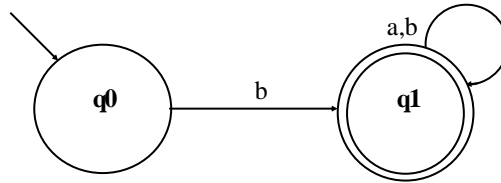
ב- a . האם L רגולרית? הוכח את תשובתך.

פתרון

נגדיר את שפת הבסיס הבאה מעל הא"ב $\{a,b\}$:

L_1 – שפת כל המילים שמתחילות ב- b .

ברור כי L_1 רגולרית כי הנה אוטומט סופי שמקבל אותה:



מסגירות משפחת השפות הרגולריות לפעולת ההיפוך גם $R(L_1)$ רגולרית וזוהי שפת כל המילים שמסתיימות ב-b.

השפה L היא השפה הבאה $L_1 \cdot R(L_1)$.

נשים לב כי מילים ב- L_1 מכילות לפחות b אחת וכך גם מילים ב- $R(L_1)$ ולכן מילים בשפה $L_1 \cdot R(L_1)$ מכילות לפחות שתי אותיות b . ברור כי מילים בשפה זו מתחילות ב- b ומסתיימות ב- b ולכן הן אינן מתחילות ב- a ואינן מסתיימות ב- a .

כדאי לשים לב כי שפת כל המילים שאינן מתחילות ב- a אינה שפת כל המילים שמתחילות ב- b , כי המילה הריקה שייכת לשפה הראשונה ולא לשנייה, אך במקרה זה, בגלל שמילה בשפה L חייבת להכיל לפחות שתי אותיות b היא אינה יכולה להיות ריקה ולכן אנו יכולים להשתמש בפעולות שרשור ולהתעלם מהמילה הריקה.

אפשרות פירוק אחרת היא ע"י שתי שפות: שפת כל המילים שאינן מתחילות ב- a (L_2) ושפת כל המילים שמכילות שתי אותיות b (L_3) ואז $L = L_2 \cap L_3 \cap R(L_2)$. המורכבות הטכנית שמשרה הפתרון הזה היא מעט יותר גדולה. כמובן, אפשר גם להשתמש בשפת המילים שמתחילות ב- a (L_4) ובפירוק $\overline{L_4} \cap L_3 \cap \overline{R(L_4)}$. המורכבות הטכנית של הפתרון הזה דומה לזו של הפתרון הקודם.

שאלה 19 (דגנית מורן)

תהי L שפת כל המילים מעל הא"ב $\{a,b,c\}$ המקיימות את כל התנאים הבאים: האות לפני האחרונה במילה היא a , המילה מכילה פעמיים את הרצף abc ומספר האותיות b במילה הוא זוגי.

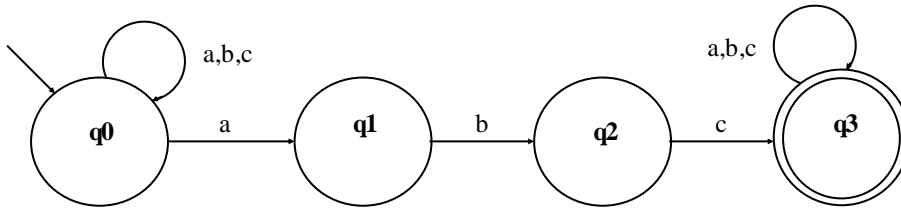
- הבא דוגמה למילה השייכת לשפה ודוגמה למילה שאינה שייכת לשפה.
- האם L רגולרית? הוכח את תשובתך.

פתרון

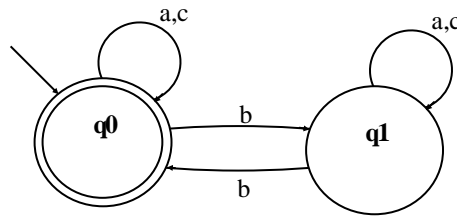
- המילה $cabccabcaa$ שייכת לשפה.
המילה $abcabcabc$ אינה שייכת לשפה.
- נגדיר את שפות הבסיס הבאות מעל הא"ב $\{a,b,c\}$:
 L_1 – שפת כל המילים שמכילות את הרצף abc .
 L_2 – שפת כל המילים בהן מספר האותיות b זוגי.
 L_3 – שפת כל המילים בהן האות לפני האחרונה היא a .

$$L = (L_1 \cdot L_1) \cap L_2 \cap L_3$$

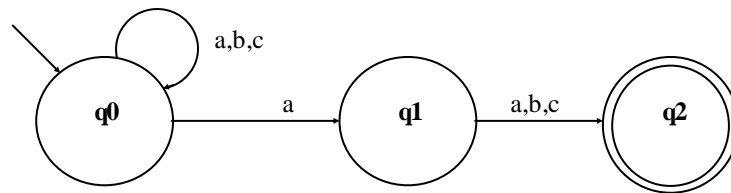
L_1 רגולרית – הנה אוטומט סופי שמקבל אותה:



L_2 רגולרית – הנה אוטומט סופי שמקבל אותה:



L_3 רגולרית – הנה אוטומט סופי שמקבל אותה:



מסגירות משפחת השפות הרגולריות לשרשור גם $L_1 \cdot L_1$ רגולרית. מסגירות משפחת השפות

הרגולריות לחיתוך גם $L_2 \cap L_3$ רגולרית וגם $L = (L_1 \cdot L_1) \cap (L_2 \cap L_3)$.

שאלה 20 (דגנית מורן)

תהי L שפת כל המילים מעל הא"ב $\{a,b,c\}$ אשר מתחילות ברצף מהצורה $a^n b$, $(n > 0)$, אינן מכילות a בהמשכן, והאות לפני האחרונה בהן היא b . האם L רגולרית? הוכח את תשובתך.

פתרון

ניתן להציג את L בעזרת שפות הבסיס הבאות מעל הא"ב $\{a,b,c\}$:

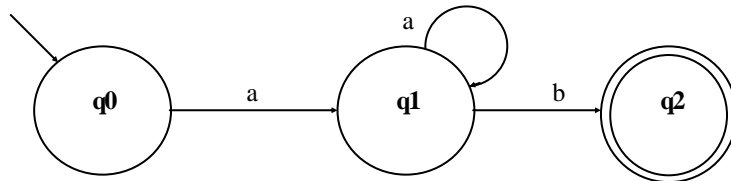
$$L_1 = \{a^n b \mid n > 0\}$$

L_2 – שפת כל המילים שאינן מכילות a .

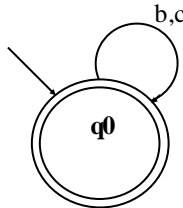
L_3 – שפת כל המילים בהן האות לפני האחרונה היא b .

$$L = (L_1 \cdot L_2) \cap L_3$$

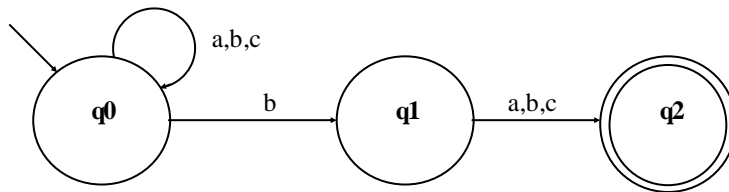
L_1 רגולרית – הנה אוטומט סופי שמקבל אותה:



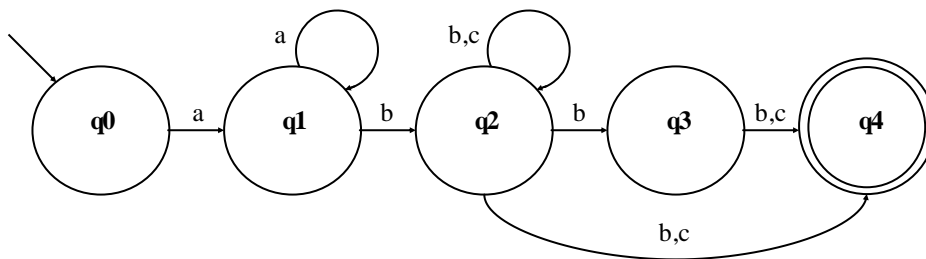
L_2 רגולרית – הנה אוטומט סופי שמקבל אותה:



L_3 רגולרית – הנה אוטומט סופי שמקבל אותה:



מסגירות משפחת השפות הרגולריות לשרשור גם $L_1 \cdot L_2$ רגולרית, ומסגירות משפחת השפות הרגולריות לחיתוך גם $(L_1 \cdot L_2) \cap L_3$ רגולרית. ניתן כמובן להוכיח כי L רגולרית גם על ידי בנייה ישירה של אוטומט המקבל אותה. אם מנצלים את המנגנון האי-דטרמיניסטי האוטומט המתאים אינו מאוד מורכב.



בכל זאת יש סיכוי לא מבוטל לטעות בבנייה ישירה. למשל, יתכן כי תלמיד לא יקח בחשבון כי b המסיימת את הרצף הפותח $a^n b$ יכולה גם להיות האות הלפני אחרונה במילה.

תהי L שפת כל המילים מעל הא"ב $\{a,b,c\}$ המקיימות לפחות אחד מבין התנאים הבאים:

א. מתחילות ברצף ab ומכילות cc .

ב. מכילות את הרצף bbc .

האם L רגולרית? הוכח את תשובתך.

פתרון

נגדיר את שפות הבסיס הבאות מעל הא"ב $\{a,b,c\}$:

$$L_1 = \{ab\}$$

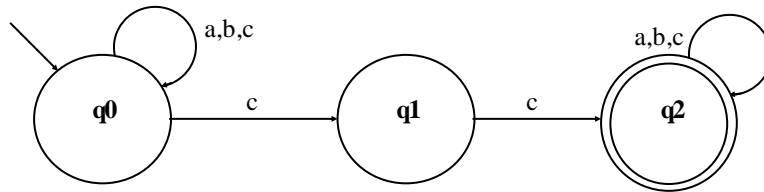
L_2 – שפת כל המילים שמכילות cc ,

L_3 – שפת כל המילים שמכילות bbc .

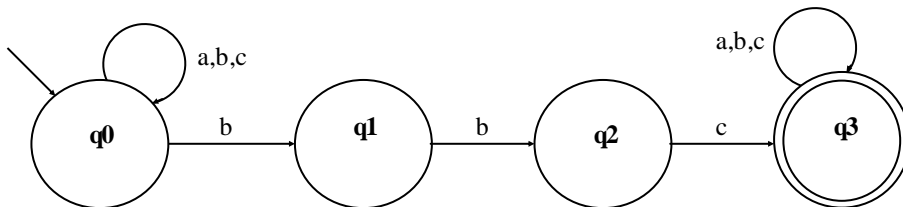
$$L = (L_1 \cdot L_2) \cup L_3$$

L_1 סופית ולכן רגולרית.

L_2 רגולרית כי הנה אוטומט סופי שמקבל אותה:



L_3 רגולרית כי הנה אוטומט סופי שמקבל אותה:



מסגירות משפחת השפות הרגולריות לשרשור גם $L_1 \cdot L_2$ רגולרית ומסגירות משפחת השפות הרגולריות

לאיחוד גם $L = (L_1 \cdot L_2) \cup L_3$ רגולרית.