תכונות סגירות של שפות חופשיות הקשר

שאלה 1 (איריס ברגורי)

נתבונן בשפה מעל הא"ב {a,b,c} המכילה את כל המילים שמקיימות **לפחות** אחד מהתנאים הבאים:

א. המילה היא פלינדרום.

ב. המילה מורכבת משני חלקים, כך שהחלק הראשון אורכו זוגי ומספר האותיות b בו מתחלק ב-3 והחלק השני מכיל מספר אותיות b הגדול ממספר אותיות a שבו.

ג. מספר האותיות a במילה מתחלק ב-4, מספר האותיות b במילה אי-זוגי ואורך המילה זוגי.

האם שפה זו חופשית הקשר? הוכח את תשובתך.

פתרון

נגדיר את השפות הבאות מעל הא"ב {a,b,c} :

L_1={w | פלינדרום w}

$L_2=\{w \mid |w| \bmod 2 = 0\}$

L_3={w | מספר האותיות b ב-w מתחלק ב-3}

L_4={w | מספר האותיות b ב-w גדול ממספר האותיות a ב-w}

L_5={w | מספר האותיות a ב-w מתחלק ב-4}

L_6={w | מספר האותיות b ב-w אי זוגי}

השפה המוגדרת בשאלה היא בדיוק השפה $(L_1\cup((L_2\cap L_3)\cdot L_4))\cup((L_2\cap L_5)\cap L_6)$.

L_5, L_2, L_3 הן רגולריות (כמובן, יש להראות אוטומטים סופיים שמקבלים אותן) ולכן מסגירות משפחת השפות הרגולריות לפעולת החיתוך נובע כי גם $L_2\cap L_3$ ו-$L_2\cap L_5$ רגולריות. L_6 אף היא רגולרית (שוב, יש להראות אוטומט שמקבל אותה) ושוב מסגירות השפות הרגולריות לחיתוך נקבל כי $(L_2\cap L_5)\cap L_6$ רגולרית. שפה רגולרית היא בפרט חופשית הקשר ולכן $L_2\cap L_3$ ו- $(L_2\cap L_5)\cap L_6$ הן חופשיות הקשר. L_4 היא חופשית הקשר (ראו פתרון שאלה 5 בהמשך, כאשר באוטומט הנבנה שם עבור L_4 יש להחליף כל 1 ב-b, כל 0 ב-a, ולהוסיף לכל מצב אפשרי של המחסנית, כולל מחסנית ריקה, מעברים לולאתיים עם האות c שאינם נוגעים במחסנית). מסגירות משפחת השפות חופשיות ההקשר לפעולת השרשור נקבל כי $(L_2\cap L_3)\cdot L_4$ חופשית הקשר. L_1 היא חופשית הקשר (ראו דוגמה 5.4 בספר לתלמיד). מסגירות משפחת השפות חופשיות ההקשר לפעולת האיחוד נקבל כי $L_1\cup((L_2\cap L_3)\cdot L_4)$ חופשית הקשר ולכן גם $(L_1\cup((L_2\cap L_3)\cdot L_4))\cup((L_2\cap L_5)\cap L_6)$ חופשית הקשר.

<u>שאלה 2</u> (ויקטוריה צורי)

תהי L השפה הבאה מעל הא"ב {a,b,c}:

$$L=\{a^ib^jc^k \mid i,k,j \geq 1 \text{ וגם } (k>j \text{ או } j>i)\}$$

האם L חופשית הקשר? הוכח את תשובתך.

<u>פתרון</u>

שאלה זו מתאימה הן לעבודת כיתה והן כשיעורי בית אחרי סיום תהליך הלימוד של פרקים 5 ו-6.
השאלה מדגימה בצורה יפה ששימוש בתכונות סגירות ובפירוק שפה נתונה לשפות פשוטות יותר הוא כדאי גם עבור שפות חופשיות הקשר.

השאלה מתאימה גם למבחן משום שאינה כוללת בנייה טכנית מורכבת שדורשת זמן רב, כי הבנייה שבה מבוססת במידה רבה על פתרון תרגיל 5.14 מספר הלימוד.

ניתן להציג את L באופן הבא: $L_1=L_1\cup L_2$ כאשר L_1 ו- L_2 מעל {a,b,c} :

$$L_1=\{a^ib^jc^k \mid i,k,j \geq 1 \text{ וגם } k>j\}$$

$$L_2=\{a^ib^jc^k \mid i,k,j \geq 1 \text{ וגם } j>i\}$$

את L_1 ניתן להציג באופן הבא: $L_1=L_3\cdot L_4$ כאשר L_3 ו- L_4 מעל {a,b,c}:

$$L_3=\{a^i \mid i \geq 1\}$$

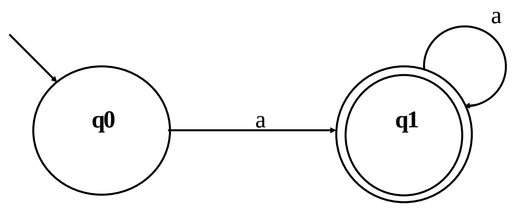
$$L_4=\{b^jc^k \mid k,j \geq 1, k>j\}$$

ובדומה, את L_2 ניתן להציג באופן הבא: $L_2=L_5\cdot L_6$ כאשר L_5 ו- L_6 מעל {a,b,c}:

$$L_5=\{a^ib^j \mid i,j \geq 1, j>i\}$$

$$L_6=\{c^k \mid k \geq 1\}$$

L_3 ו-L_6 רגולריות, כי ניתן לבנות אוטומטים סופיים שמקבלים אותן. זהו אוטומט עבור L_3:



ואוטומט עבור L_6 מתקבל ממנו ע"י החלפת כל a ב-c. מאחר שהשפות הרגולריות הן בפרט חופשיות הקשר, הרי ש-L_3 ו-L_6 חופשיות הקשר. L_5 היא בדיוק השפה שהוצגה בתרגיל 5.14 בספר לתלמיד והיא לכן חופשית הקשר. L_4 אף היא חופשית הקשר – ניתן לקבל אוטומט מחסנית שמקבל אותה מאוטומט המחסנית שמקבל את L_5 ע"י החלפת כל a ב-b וכל b ב-c.

מסגירות משפחת השפות חופשיות ההקשר לפעולת השרשור גם $L_1=L_3\cdot L_4$ ו-$L_2=L_5\cdot L_6$ הן חופשיות הקשר, ומסגירות משפחת השפות חופשיות ההקשר לפעולת האיחוד גם $L_1\cup L_2$ חופשית הקשר.

<u>שאלה 3</u> (אלה פוק)

תהי R שפה רגולרית ותהי L שפה חופשית הקשר. נניח כי קיימת שפה T כך שמתקיים $T\cdot L=R$. כיצד ניתן לאפיין את T?

א. T בהכרח רגולרית.

ב. T בהכרח חופשית הקשר ואינה רגולרית.

ג. T בהכרח חופשית הקשר אך יכולה להיות רגולרית או לא.

ד. אף אחד מהנ"ל.

הצדק את תשובתך באופן מלא.

<u>פתרון</u>

ידוע כי השפות חופשיות ההקשר סגורות לפעולת השרשור, כלומר אם T ו-L חופשיות הקשר אז R בהכרח חופשית הקשר אבל אין זה אומר ש-R אינה רגולרית. לכן, סעיף א' אינו נכון: ניתן למצוא דוגמה כך ש- T ו-L חופשיות הקשר, ו-T אינה רגולרית, ושרשורן רגולרי. למשל $T=\{a^ib^j \mid i\neq j,\ i, j \geq 0\}$ $L=\{b^ka^\ell \mid k\neq\ell,\ k, \ell \geq 0\}$. אלו הן שפות חופשיות הקשר שאינן רגולריות. שרשורן $T\cdot L$ הוא השפה $\{a^ib^ja^k \mid i,k,j \geq 0\}-\{\varepsilon, a, b, aba\}$, משום שפרט לארבע המילים ε, a, b ו-aba כל מילה מהצורה $a^ib^ja^k$ ניתן לחלוקה לרישא a^ib^j ולסיפא b^ka^ℓ, כך שבכל חלק החזקות שונות זו מזו. $\{\varepsilon, a, b, aba\}$ היא סופית ולכן רגולרית. $\{a^ib^ja^k \mid i,k,j\geq 0\}$ גם היא רגולרית (יש להראות אוטומט שמקבל אותה). ע"פ תרגיל 3.27 השפות הרגולריות סגורות להפרש ולכן גם $\{a^ib^ja^k \mid i,k,j \geq 0\}-\{\varepsilon, a, b, aba\}$ היא שפה רגולרית.

גם סעיף ב' אינו נכון. T בוודאי יכולה להיות רגולרית ולכן גם חופשית הקשר. למשל $T=\{a\}$ (חופשית הקשר כי היא רגולרית), $L=\{b\}$, ושרשורן הוא השפה $\{ab\}$. ניתן למצוא דוגמה מתאימה גם עבור L שהיא חופשית הקשר ולא רגולרית. למשל $T=\{a^i \mid i\geq 0\}$, $L=\{a^nb^m \mid n\neq m,\ n,m\geq 0\}$, $T\cdot L=\{a^nb^m \mid n,m\geq 0\}$.

סעיף ג' גם הוא אינו נכון: $T = \{ww \mid w \text{ מעל הא"ב } \{a,b\}\}$, L היא שפת כל המילים מעל הא"ב $\{a,b\}$. T אינה חופשית הקשר. L רגולרית ולכן חופשית הקשר והשפה $T\cdot L$ היא שפת כל המילים מעל הא"ב $\{a,b\}$ כי כל מילה x מעל הא"ב $\{a,b\}$ ניתנת להצגה כ: $\varepsilon\cdot\varepsilon\cdot x$. לכן התשובה הנכונה היא סעיף ד'.

<u>שאלה 4</u> (אלה פוק)

יהיו $\{\sigma_1,..., \sigma_n\}$ ו-$\{\eta_1,..., \eta_m\}$ שני א"ב, לאו דווקא זרים. תהי L_1 שפה חופשית הקשר מעל הא"ב $\{\sigma_1,..., \sigma_n\}$ ו-L_2 שפה חופשית הקשר מעל הא"ב $\{\eta_1,..., \eta_m\}$.

עבור מילה w מעל הא"ב $\{\eta_1,..., \eta_m\} \cup \{\sigma_1,.., \sigma_n\}$ נסמן ב- $w/\{\sigma_1,..., \sigma_n\}$ את המילה המתקבלת מ- w ע"י השמטת האותיות ב- w שאינן שייכות ל- $\{\sigma_1,..., \sigma_n\}$ ובדומה, נסמן ב-$w/\{\eta_1,..., \eta_m\}$ את המילה המתקבלת מ- w ע"י השמטת האותיות ב- w שאינן שייכות ל-$\{\eta_1,...., \eta_m\}$.

האם השפה הבאה בהכרח חופשית הקשר? הוכח את תשובתך.

$$A(L_1,L_2) = \{ w \mid \{\sigma_1, ..., \sigma_n\} \cup \{\eta_1, ..., \eta_m\} \text{ מעל הא"ב } w,$$
$$w / \{\sigma_1, ..., \sigma_n\} \in L_1,$$
$$w / \{\eta_1, ..., \eta_m\} \in L_2 \}$$

פתרון

שאלה זו טובה כדי לתרגל הבנת הגדרות, משום שברגע שההגדרות הכלולות בה מובנות, קל למדי למצוא דוגמה המראה כי $A(L_1,L_2)$ אינה בהכרח חופשית הקשר.

נבחר $L_1=\{ a^nb^nc^k \mid n,k\geq 0\}$ מעל הא"ב $\{a,b,c\}$ ו-$L_2=\{ a^kb^nc^n \mid n,k\geq 0\}$ מעל אותו הא"ב. במקרה זה, כמובן $\{\sigma_1,..., \sigma_n\} = \{\eta_1,..., \eta_m\}$ ולכן לכל מילה w מעל $\{\eta_1,..., \eta_m\} \cup \{\sigma_1,..., \sigma_n\}$ מתקיים $w /\{\sigma_1,..., \sigma_n\} = w$ ו-$w /\{\eta_1,..., \eta_m\} = w$.

בתנאים אלו:

$$A(L_1,L_2)=\{w \mid w\in L_1 \text{ וגם } w\in L_2, \{a,b,c\} \text{ מעל הא"ב } w\}$$

כלומר

$$A(L_1, L_2)=L_1\cap L_2=\{ a^nb^nc^n \mid n\geq 0\}$$

וזו כידוע שפה שאינה חופשית הקשר.

שאלה 5 (אלה פוק)

נתבונן בשפה מעל הא"ב $\{0,1\}$ אשר כל מילה בה מקיימת לפחות אחד משלושת התנאים הבאים:

1. מתחילה ברצף 001 ומסתיימת ברצף 101.
2. מספר האותיות 1 במילה גדול ממספר האותיות 0 במילה.
3. מתחילה ברצף 101 ומסתיימת ברצף 001.
4. האם L חופשית הקשר? הוכח את תשובתך.

פתרון

ניתן להגדיר את L בעזרת השפות הבאות, כולן מעל הא"ב $\{0,1\}$:

$$L_1 =\{ w \mid \text{w מתחילה ברצף 001} \}$$
$$L_2 =\{ w \mid \text{w מתחילה ברצף 101} \}$$
$$L_3 =\{ w \mid \text{w מסתיימת ברצף 001} \}$$
$$L_4 =\{ w \mid \text{מספר האותיות 1 ב-w גדול ממספר האותיות 0 ב-w} \}$$

עכשיו:

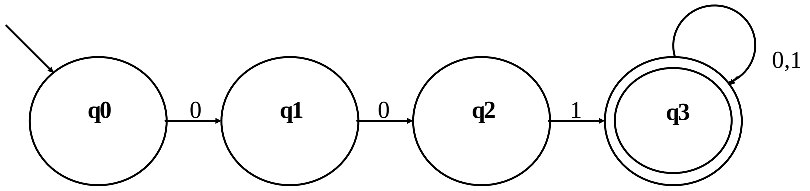
זו השפה שמתאימה לתנאי 1: $L_5 = L_1 \cap R (L_2)$

זו השפה שמתאימה לתנאי 3: $L_6 = L_2 \cap L_3$

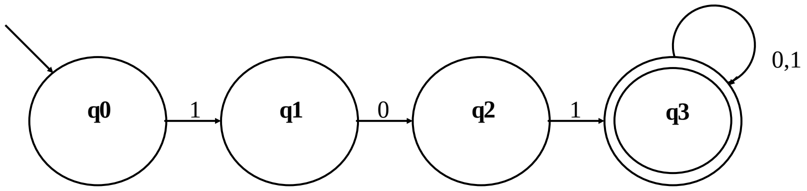
ו- L_4 כמובן מתאימה לתנאי 2.

$L= L_5 \cup L_4 \cup L_6$

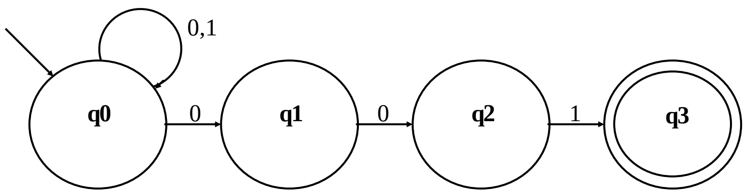
L_1 רגולרית – הנה אוטומט סופי שמקבל אותה:



בדומה, גם L_2 רגולרית ומתקבלת על ידי האוטומט הבא:



L_3 אף היא רגולרית ומתקבלת ע"י האוטומט הבא:



מסגירות משפחת השפות הרגולריות לפעולת ההיפוך גם $R(L_2)$ רגולרית.

מסגירות משפחת השפות הרגולריות לפעולת החיתוך גם $L_5=L_1 \cap R(L_2)$ ו-$L_6=L_2 \cap L_3$ רגולריות ובפרט חופשיות הקשר.

L_4 אף היא חופשית הקשר ואוטומט המקבל אותה דומה לאוטומט שמתאים לפתרון תרגיל 5.19 בספר לתלמיד. יש לאוטומט 3 מצבים:

q_0 – המצב ההתחלתי, זוכר כי מספר האותיות a שנקראו שווה למספר האותיות 1 שנקראו.

q_1 – זוכר כי מספר האותיות 0 שנקראו קטן ממספר האותיות 1 שנקראו. זהו מצב מקבל.

q_2 – זוכר כי מספר האותיות 0 שנקראו גדול ממספר האותיות 1 שנקראו.

א"ב הקלט הוא כמובן $\{0,1\}$ וא"ב המחסנית הוא $\{S,A\}$. קבוצת המעברים היא:

קריאת 0 במצב שוויון בין מספר האותיות 0 שנקראו למספר האותיות 1 שנקראו – $(q_0,0,\perp,q_2,S)$

קריאת 1 במצב שוויון בין מספר האותיות 0 שנקראו למספר האותיות 1 שנקראו – $(q_0,1,\perp,q_1,S)$

קריאת 0 כאשר יש עודף של אות 1 אחת – $(q_1,0,S,q_0,\varepsilon)$

קריאת 1 כאשר יש עודף של אות 1 אחת – $(q_1,1,S,q_1,SA)$

קריאת 0 כאשר יש עודף של אותיות 1 – $(q_1,0,A,q_1,\varepsilon)$

קריאת 1 כאשר יש עודף של אותיות 1 – $(q_1,1,A,q_1,AA)$

קריאת 0 כאשר יש עודף של אות 0 אחת – $(q_2,0,S,q_2,SA)$

קריאת 1 כאשר יש עודף של אות 0 אחת – $(q_2,1,S,q_0,\varepsilon)$

קריאת 0 כאשר יש עודף של אותיות 0 – $(q_2,0,A,q_2,AA)$

קריאת 1 כאשר יש עודף של אותיות 0 – $(q_2,1,A,q_2,\varepsilon)$

שימו לב שכאן מספיקות שתי אותיות לא"ב המחסנית, שלא כמו באוטומט שניתן במדריך למורה בפתרון תרגיל 5.19. זאת משום שכאן המצבים q_1 ו-q_2 זוכרים לאיזה אות יש עודף – 0 או 1 ואילו באוטומט ההוא שימשו לכך האותיות שבראש המחסנית.

מסגירות משפחת השפות חופשיות ההקשר לאיחוד גם $L_5 \cup L_4$ חופשית הקשר וגם $L= (L_5 \cup L_4) \cup L_6$ חופשית הקשר.

<u>שאלה 6</u> (אסנת אנגלמן, אסתי מאסטראסי, אורנה שטיין)

הוכח כי השפה הבאה מעל הא"ב $\{a,b,c\}$ היא חופשית הקשר:

$$L =\{a^n b^m c^k \mid n=m \text{ או } m=k ,n,m,k\geq 0 \}$$

<u>פתרון</u>

שפה זו דומה מאוד לשפה שהוגדרה בשאלה 2, ובהתאם גם הפתרון דומה, אך פשוט יותר.

ניתן להציג את L כך:

$$L_1 =\{a^n b^n c^k \mid n,k\geq 0\}$$

$$L_2 =\{a^n b^k c^k \mid n,k\geq 0\}$$

$$L = L_1 \cup L_2$$

את L_1 ניתן להציג באופן הבא:

$$L_3 =\{a^n b^n \mid n\geq 0\}$$

$$L_4 = \{c^k \mid k\geq 0\}$$

$$L_1 = L_3 \cdot L_4$$

את L_2 ניתן להציג באופן הבא:

$$L_5 =\{a^n \mid n \geq 0\}$$

$$L_6 =\{b^k c^k \mid k\geq 0\}$$

$$L_2 = L_5 \cdot L_6$$

L_4 ו-L_5 רגולריות (אוטומטים מתאימים הם דומים לאלו שניתנו בפתרון בשאלה 2, אך פשוטים יותר: דרוש רק מצב התחלתי יחיד – התחלתי ומקבל – עם מעבר לולאתי, משום שבמקרה זה התנאי הוא $n\geq0$ בעוד שבשאלה 2 התנאי הוא $n\geq1$) ולכן חופשיות הקשר.
L_3 חופשית הקשר (מוכח בספר לתלמיד) וכמוה גם L_6 (אוטומט מחסנית עבור L_6 ניתן לקבל מאוטומט מחסנית עבור L_3 ע"י החלפת כל a ב-b וכל b ב-c). מסגירות משפחת השפות חופשיות ההקשר לשרשור גם L_1 ו-L_2 חופשיות הקשר ומסגירות משפחת השפות חופשיות ההקשר לאיחוד גם L חופשית הקשר.

<u>שאלה 7</u> (אסנת אנגלמן, אסתי מאסטראסי, אורנה שטיין)
עם עלייתו של המשטר החדש בסין, הוחלט למנות בכל כפר את מספר הגברים, הנשים והילדים. אם מספר הילדים גבוה ממספר הנשים וגם ממספר הגברים, הכפר מחוסל.

א. נסח שפה המייצגת את הכפרים שישרדו את שינוי המשטר.
ב. הראה כי השפה שניסחת בסעיף א' חופשית הקשר.

<u>פתרון</u>

א. השפה המבוקשת היא L, שפת כל המילים מעל הא"ב {a,b,c} כך שמספר האותיות c במילה אינו עולה על מספר האותיות a או שמספר האותיות c במילה אינו עולה על מספר האותיות b. אם נסמן ב-$\#_\sigma(w)$ את מספר מופעי σ ב-w אז:

$$L = \{w \mid \#_c(w) \leq \#_a(w) \text{ או } \#_c(w) \leq \#_b(w)\}$$

ב. $L = L_1 \cup L_2$, כאשר L_1 ו-L_2 מעל הא"ב {a,b,c}:

$$L_1 = \{w \mid \#_c(w) \leq \#_a(w)\}$$

$$L_2 = \{w \mid \#_c(w) \leq \#_b(w)\}$$

נראה כי L חופשית הקשר: אוטומט עבור L_2 מתקבל מאוטומט מחסנית עבור L_1 ע"י החלפת כל a ב-b וכל b ב-a. אוטומט עבור L_1 דומה מאוד לאוטומט שניתן לשאלה 5 עבור השפה L_4. יש כמה הבדלים: צריך להחליף כל 0 ב-c וכל 1 ב-a. המצבים המקבלים יהיו q_1 ו-q_0. צריך להוסיף בכל מצב לולאה עצמית עם האות b לכל אות אפשרית בראש המחסנית (כולל מחסנית ריקה) שאינה משנה את תוכן המחסנית. מסגירות משפחת השפות חופשיות ההקשר לאיחוד גם L חופשית הקשר.

<u>שאלה 8</u> (אסנת אנגלמן, אסתי מאסטראסי, אורנה שטיין)
הוכח כי השפות חופשיות ההקשר סגורות לשרשור עם שפה רגולרית (כלומר, אם L_1 חופשית הקשר ו-L_2 רגולרית, אז $L_1 \cdot L_2$ חופשית הקשר).
<u>פתרון</u>
L_2 רגולרית ולכן בפרט חופשית הקשר וידוע כי השפות חופשיות ההקשר סגורות לשרשור.

שאלה 9 (אתי מנשה)

תהיינה L_1 ו- L_2 השפות הבאות מעל הא"ב $\{a,b\}$:

$$L_1 = \{a^n b^n\, w\cdot R(w) \mid n\geq 0, \{a,b\} \text{ מילה מעל הא"ב } w\}$$

$$L_2 = \{R(w)\cdot w\, b^n a^n \mid n\geq 0, \{a,b\} \text{ מילה מעל הא"ב } w\}$$

א. הוכח כי L_1 ו- L_2 חופשיות הקשר.

ב. הוכח כי $L_1 \cap L_2$ חופשית הקשר.

פתרון

א. ידוע כי השפה $L_3=\{a^n b^n \mid n\geq 0\}$ היא חופשית הקשר, וידוע כי השפה

$$L_4 = \{w\cdot R(w) \mid \{a,b\} \text{ מילה מעל הא"ב } w\}$$

היא חופשית הקשר (שתי הטענות מוכחות בספר הלימוד).

מסגירות משפחת השפות חופשיות ההקשר לשרשור נובע כי גם $L_1=L_3\cdot L_4$ היא חופשית הקשר ומסגירות משפחת השפות חופשיות ההקשר להיפוך נובע גם כי $L_2 = R(L_1)$ היא חופשית הקשר.

ב. לא ניתן להשתמש בסגירות לחיתוך כי השפות חופשיות ההקשר אינן סגורות לפעולת החיתוך. אבל ניתן לראות כי $L_1 \cap L_2=L_4$ שהוגדרה לעיל, ואשר ידוע כי היא חופשית הקשר. נסביר זאת (זו אינה הוכחה פורמלית):

ברור כי $L_4 \subseteq L_1 \cap L_2$: כל מילה מהצורה $w\cdot R(w)$ שייכת הן ל-L_1 והן ל-L_2 עבור $n=0$.

תהי w מילה המקיימת $w=a^n b^n w_1 R(w_1)$ וגם $w=R(w_2)w_2 b^m a^m$ עבור $m,n\geq 0$ ו- w_1, w_2 מעל הא"ב $\{a,b\}$.

אם $m=0$ או $n=0$ אז ברור ש-w מהצורה $w\cdot R(w)$. לכן נבחן את המקרה בו $n,m>0$. במקרה כזה ניתן לראות כי w חייבת להיות מהצורה $(a^n b^n)^x a^n b^n a^n (b^n a^n)^x$, כאשר n זוגי וגדול מ-1 ו-$0\leq x$. מילים מהצורה הזאת הן גם מהצורה $w\cdot R(w)$. לכן, בכל מקרה בו $w \in L_1 \cap L_2$, w היא פלינדרום באורך זוגי, כלומר, מהצורה $w\cdot R(w)$.

שאלה 10 (אתי מנשה)

תהי L שפה מעל א"ב כלשהו. שתי שפות L_1 ו- L_2 נקראות חלוקה של L אם מתקיים $L_1 \cap L_2 = \varnothing$ (כלומר L_1 ו- L_2 זרות) ו-$L_1 \cup L_2 = L$.

תהי L שפת כל המילים מעל הא"ב $\{a,b\}$ ותהיינה L_1 ו- L_2 חלוקה של L.

ידוע כי L_1 חופשית הקשר. האם בהכרח גם L_2 חופשית הקשר? הוכח את תשובתך.

פתרון

מאחר ש- $L_1 \cap L_2 = \varnothing$ ו-$L_1 \cup L_2$ היא שפת כל המילים מעל הא"ב $\{a,b\}$, הרי ש- $L_2 = \overline{L_1}$. אם L_1 חופשית הקשר, משלימתה אינה בהכרח חופשית הקשר וניתן לראות דוגמה מתאימה בספר הלימוד בפתרון תרגיל 6.11.

<u>שאלה 11</u> (אתי מנשה)

שתי שפות חופשית הקשר L_1 ו- L_2 תקראנה חופפות-חלקית אם $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$.

תהיינה L_a, L_b ו- L_c שפות חופשיות הקשר המקיימות את התנאים הבאים:

1. L_a ו-L_b חופפות חלקית.
2. L_b ו-L_c חופפות חלקית.

האם בהכרח מתקיים ש-L_a ו-L_c חופפות-חלקית? הוכח את תשובתך.

<u>פתרון</u>

הטענה אינה נכונה. הנה דוגמא נגדית מתאימה:

$$L_c=\{c^n \mid n>0\},\ L_b=\{a^nc^m \mid n,m \geq 0\},\ L_a=\{a^nb^m \mid n,m \geq 0\}$$

$L_a \cap L_b = \{a^n \mid n \geq 0\} \neq \emptyset$ ולכן L_a ו-L_b חופפות חלקית

$L_b \cap L_c = \{c^n \mid n > 0\} \neq \emptyset$ ולכן L_a ו-L_c חופפות חלקית

אבל $L_a \cap L_c = \emptyset$ ולכן L_a ו-L_c אינן חופפות חלקית.

<u>שאלה 12</u> (דגנית מורן)

תהי L השפה הבאה מעל הא"ב: $L=\{a^nb^{2n}a^n \mid n > 0\}$

תלמיד מסויים הציע להוכיח כי L חופשית הקשר בדרך הבאה:

הוא הציג את L כך: $L_1=L_1 \cdot L_2$ כך ש:

$$L_2=\{b^na^n \mid n > 0\},\ L_1=\{a^nb^n \mid n>0\}$$

ידוע כי L_1 ו- L_2 חופשיות הקשר, ומסגירות משפחת השפות חופשיות ההקשר לשרשור גם L רגולרית.

האם ההוכחה נכונה? הצדק את טענתך.

<u>פתרון</u>

ההוכחה שגויה משום ש: $L \neq L_1 \cdot L_2$. למשל, המילה aabb שייכת ל-L_1 והמילה bbbaaa שייכת ל-L_2 ולכן שרשורן, המילה aabbbbbaaa, שייכת לשפה $L_1 \cdot L_2$. אבל המילה aabbbbbaaa לא שייכת לשפה L.