בעיות משולבות

שאלה 1 – הוכחת אי רגולריות + בניית אוטומט מחסנית (איריס ברגורי)

נתונה השפה מעל הא"ב $\{a,b,c,d\}$

$$L=\{a^t b^m c^p d^k \mid t\geq m,\ p\neq k,\ m,p,k\geq 0\}$$

א. האם השפה רגולרית? הוכח את תשובתך.

ב. האם השפה חופשית הקשר? הוכח את תשובתך.

פתרון

א. השפה אינה רגולרית. נניח בשלילה שהיא רגולרית ולכן קיים אוטומט סופי A שמקבל אותה. נסתכל בקבוצת המילים $W=\{a^t \mid t>0\}$. נראה שעל כל מילה בקבוצה W מגיע A למצב שונה. נניח שקיימות בקבוצה שתי מילים a^i, a^j כך ש: $i>j>0$ ו-A מגיע על a^i ו-a^j לאותו מצב q. נסתכל על המילה $a^i b^{j+1} c$. מילה זו שייכת ל-L ($i>j$ ולכן $i\geq j+1$ ו- $1=p\neq k=0$). ולכן קריאת הסיפא $b^{j+1}c$ מובילה את האוטומט מהמצב q למצב מקבל. אבל מכאן נובע שאוטומט זה מקבל גם את המילה $a^j b^{j+1} c$, למרות שמילה זו אינה שייכת ל-L (הערך j אינו גדול או שווה לערך j+1). הגענו לסתירה ולכן בהכרח האוטומט A מגיע למצב שונה על כל מילה ב-W. מאחר ש-W אינסופית, נובע מכך של-A אינסוף מצבים בסתירה להיותו אוטומט סופי. לכן הנחת השלילה הראשונה שגויה ומכאן L אינה רגולרית.

ניתן להוכיח גם בעזרת הקבוצה האינסופית $W_2=\{a^2c^p \mid p>0\}$:

אם נניח שקיימות בקבוצה זו שתי מילים a^2c^i, a^2c^j כך ש- $i\neq j$ ו-A מגיע על שתיהן לאותו מצב q, ונתבונן במילה $a^2c^id^j$, אז מכך שהמילה $a^2c^id^j$ בשפה (כי $m=0\leq 2$ ו- $i\neq j$) נובע שהאוטומט A מגיע מהמצב q עם d^j למצב מקבל. אבל מכאן נובע שהוא מקבל גם את המילה $a^2c^jd^j$ שאינה בשפה כי לא מתקיים $j=k\neq p=j$. לכן גם הקבוצה W_2 מחייבת מצב שונה לכל מילה – כלומר אינסוף מצבים.

ב. השפה חופשית הקשר. נבנה אוטומט מחסנית שמקבל אותה. האוטומט יפעל על פי האלגוריתם הבא: עם קריאת האותיות a האוטומט ידחוף אותיות A למחסנית ועם קריאת אותיות b ישלוף מהמחסנית אותיות A עד להתרוקנותה או עד שמסתיימות האותיות b, אך לא יסכים לקרוא b מעבר להתרוקנות המחסנית (ולכן יש צורך בסימון תחתית המחסנית). עם קריאת אותיות c שוב ידחוף האוטומט אותיות למחסנית ועם קריאת אותיות d יישלפו האותיות מהמחסנית. בשלב המילוי השני האוטומט יסמן את תחתית המחסנית ולכן, עם קריאת הסימון מספר האותיות d שנקראו שווה למספר האותיות c

שנקראו. לפיכך, קריאת הסימון צריכה להעביר את האוטומט למצב שאינו מקבל. קריאת אותיות d נוספות מעבר לשוויון מביאה את האוטומט למצב מקבל.

לאוטומט שישה מצבים:

q_0 – מצב התחלתי בו נקראות אותיות a.

q_1 – המצב שבו נקראות אותיות b.

q_2 – המצב שבו נקראות אותיות c.

q_3 – המצב שבו נקראות אותיות d ומספר האותיות d שנקראו קטן ממספר האותיות c שנקראו.

q_4 – המצב שבו נקראו אותיות d במספר שווה למספר האותיות c שנקראו.

q_5 – המצב שבו נקראות אותיות d ומספר האותיות d שנקראו גדול ממספר האותיות c שנקראו.

כל המצבים פרט ל- q_4 הם מצבים מקבלים.

האלגוריתם שעומד בבסיסו של האוטומט פשוט למדי, אך לאוטומט מעברים רבים, בגלל מקרי הקצה האפשריים הרבים, כאשר לפחות אחת האותיות חסרה (כלומר t, m, p או k שווים ל-0). לכן הגדרה חליפית של השפה בה נתון $m, p, k>0$ תפשט את האוטומט באופן משמעותי.

מעברים:

קריאת a ראשונה –	$(q_0,a,\perp,q_0,S)$
קריאת a שניה –	(q_0,a,S,q_0,SA)
קריאת a שלישית ויותר –	(q_0,a,A,q_0,AA)
קריאת b ראשונה שאינה מביאה לריקון המחסנית –	$(q_0,b,A,q_1,\varepsilon)$
קריאת b ראשונה המביאה לריקון המחסנית –	$(q_0,b,S,q_2,\varepsilon)$
קריאת b שניה ויותר שאינה מביאה לריקון המחסנית –	$(q_1,b,A,q_1,\varepsilon)$
קריאת b שניה ויותר המביאה לריקון המחסנית –	$(q_1,b,S,q_2,\varepsilon)$
קריאת c ראשונה כאשר לא נקראו אותיות a ו-b –	$(q_0,c,\perp,q_2,T)$
קריאת c ראשונה כאשר ההפרש בין מספר האותיות a ומספר האותיות b הוא 1 –	(q_0,c,S,q_2,ST)
קריאת c ראשונה כאשר ההפרש בין מספר האותיות a ומספר האותיות b עולה על 1 –	(q_0,c,A,q_2,AT)
קריאת c ראשונה כאשר מספר האותיות a שנקראו שווה למספר האותיות b שנקראו –	$(q_2,c,\perp,q_2,T)$
קריאת c שניה –	(q_2,c,T,q_2,TB)
קריאת c שלישית ויותר –	(q_2,c,B,q_2,BB)
קריאת d ראשונה כאשר לא נקראו אותיות a, b ו-c –	$(q_0,d,\perp,q_5,\varepsilon)$
קריאת d ראשונה כאשר לא נקראו אותיות c ו-b ונקראה אות a אחת –	$(q_0,d,S,q_5,\varepsilon)$
קריאת d ראשונה כאשר לא נקראו אותיות c ו-b ונקראה יותר מאות a אחת –	$(q_0,d,A,q_5,\varepsilon)$

קריאת d ראשונה כאשר לא נקראו אותיות c, וההפרש בין מספר האותיות a שנקראו למספר האותיות b שנקראו עולה על 1 – $(q_1,d,A,q_5,\varepsilon)$

קריאת d ראשונה כאשר לא נקראו אותיות c, וההפרש בין מספר האותיות a שנקראו למספר האותיות b שנקראו הוא בדיוק 1 – $(q_1,d,S,q_5,\varepsilon)$

קריאת d ראשונה כאשר לא נקראו אותיות c, ומספר האותיות a שנקראו שווה למספר האותיות b שנקראו – $(q_2,d,\perp,q_5,\varepsilon)$

קריאת d ראשונה כאשר נקראה בדיוק אות c אחת – $(q_2,d,T,q_4,\varepsilon)$

קריאת d ראשונה כאשר נקראה יותר מאות c אחת – $(q_2,d,B,q_3,\varepsilon)$

קריאת d שניה ויותר כאשר מספר האותיות d שנקראו קטן ממספר האותיות c שנקראו – $(q_3,d,B,q_3,\varepsilon)$

קריאת d שניה ויותר כאשר מספר האותיות d שנקראו שווה למספר האותיות c שנקראו – $(q_3,d,T,q_4,\varepsilon)$

קריאת d שניה ויותר כאשר מספר האותיות d שנקראו עולה ב-1 על מספר האותיות c שנקראו, וההפרש בין מספר האותיות a שנקראו ומספר האותיות b שנקראו עולה על 1 – $(q_4,d,A,q_5,\varepsilon)$

קריאת d שניה ויותר כאשר מספר האותיות d שנקראו עולה ב-1 על מספר האותיות c שנקראו, וההפרש בין מספר האותיות a שנקראו ומספר האותיות b שנקראו הוא בדיוק 1 – $(q_4,d,S,q_5,\varepsilon)$

קריאת d שניה ויותר כאשר מספר האותיות d שנקראו עולה ב-1 על מספר האותיות c שנקראו, ומספר האותיות a שנקראו שווה למספר האותיות b שנקראו – $(q_4,d,\perp,q_5,\varepsilon)$

קריאת d שניה ויותר כאשר מספר האותיות d שנקראו עולה ב-2 לפחות על מספר האותיות c שנקראו, ובמחסנית נותרה יותר מאות אחת – $(q_5,d,A,q_5,\varepsilon)$

קריאת d שניה ויותר כאשר מספר האותיות d שנקראו עולה ב-2 לפחות על מספר האותיות c שנקראו, ובמחסנית נותרה אות אחת – $(q_5,d,S,q_5,\varepsilon)$

קריאת d שניה כאשר מספר האותיות d שנקראו עולה ב-2 לפחות על מספר האותיות c שנקראו, והמחסנית כבר ריקה – $(q_5,d,\perp,q_5,\varepsilon)$

<u>שאלה 2</u> (אלה פוק)

עבור מילה w ואות σ נסמן ב-$\#_\sigma(w)$ את מספר מופעי האות σ ב-w. תהי L השפה הבאה מעל הא"ב $\{0,1\}$:

$$L=\{w \mid \#_0(w)\bmod 2>\#_1(w)\bmod 2,\ w \text{ מעל הא"ב } \{0,1\}\}$$

האם L היא רגולרית, שפה חופשית הקשר שאינה רגולרית או אף אחת משתי האפשרויות? הוכח את תשובתך.

<u>פתרון</u>

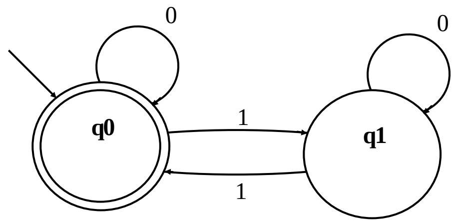
שאלה זו מתאימה כשאלה משולבת בבחינה, כלומר בבחינה המקיפה הן שפות רגולריות והן שפות חופשיות הקשר. אמנם, כדי לתת תשובה מלאה לשאלה זו מספיק שימוש לא מורכב בתכונות סגירות של שפות רגולריות, אבל ניסוח הגדרת השפה בעזרת השוואה בין שני גדלים מטעה, ועלול להוביל את התלמיד לכיוון של שפה חופשית הקשר שאינה רגולרית. לכן, שאלה זו בודקת הבנה מעמיקה. כמובן, במקרה זה ההשוואה היא בתחום חסום של ערכים בגלל החישוב מודולו (גם שימוש במספר אחר לצורך המודולו – 3 או כל מספר טבעי – היה מביא לשפה רגולרית, אבל ככל שהמספר גדול יותר, השפה מורכבת יותר).

במקרה זה, מספר מופעי האות 1 ב-w מודולו 2 חייב להיות 0 (כלומר, זוגי) ומספר מופעי האות 0 ב-w מודולו 2 חייב להיות 1 (כלומר אי-זוגי). אם כך, ניתן להגדיר את L כך: $L_1=L_1\cap L_2$ כאשר L_1 ו-L_2 מעל הא"ב $\{0,1\}$:

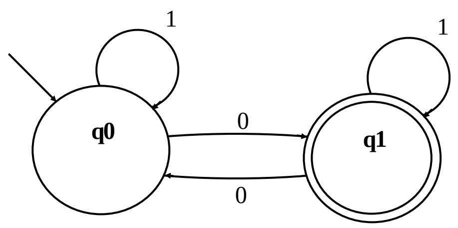
$$L_1=\{w \mid \#_1(w) \text{ זוגי}\}$$

$$L_2=\{w \mid \#_0(w) \text{ אי-זוגי}\}$$

L_1 רגולרית, הנה אוטומט סופי שמקבל אותה:



L_2 רגולרית, הנה אוטומט סופי שמקבל אותה:



ומסגירות משפחת השפות הרגולריות לחיתוך גם $L=L_1\cap L_2$ רגולרית.

<u>שאלה 3</u> – <u>הוכחת אי רגולריות + בניית אוטומטים + שימוש בתכונות סגירות</u> (אלה פוק)

נתונות 4 שפות. עבור כל שפה קבע האם היא רגולרית או חופשית הקשר שאינה רגולרית. הוכח את קביעתך.

$L_1=\{a^ib^jc^k \mid i \bmod 2=j \bmod 2,\ i,j,k\geq 0\}$

$L_2=\{a^ib^jc^k \mid i=j \text{ or } k<j,\ i,j,k\geq 0\}$

$L_3=\{a^ib^jc^k \mid |j-k|\geq i,\ j \bmod 2=0,\ i,j,k\geq 0\}$

$L_4=L_1\cup L_3$

<u>פתרון</u>

א. ניתן להציג את L_1 בעזרת השפות הבאות.

$L_5=\{a^i \mid$ i זוגי, $i\geq 0\}$

$L_6=\{a^i \mid$ i אי-זוגי, $i\geq 0\}$

$L_7=\{b^i \mid$ i זוגי, $i\geq 0\}$

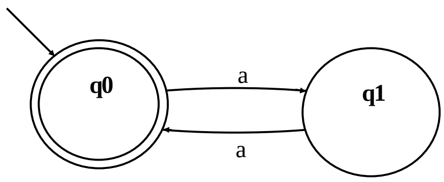
$L_8=\{b^i \mid$ i אי-זוגי, $i\geq 0\}$

$L_9=\{c^i \mid i\geq 0\}$

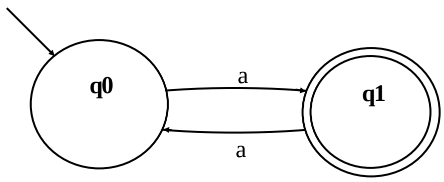
$L_1=L_5\cdot L_7\cdot L_9\cup L_6\cdot L_8\cdot L_9$

A_5,A_6 ו-A_9 הם אוטומטים עבור L_5,L_6 ו-L_9 בהתאמה:

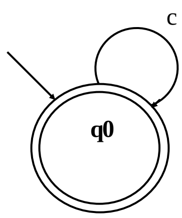
A5:



A6:



A9:



אוטומטים עבור L_7 ו-L_8 ניתן לקבל מ-A_5 ו-A_6 בהתאמה ע"י החלפת כל a ב-b.

לכן כל השפות רגולריות.

מסגירות משפחת השפות הרגולריות לשרשור גם $L_5\cdot L_7$, $(L_5\cdot L_7)\cdot L_9$, $(L_6\cdot L_8)$, $(L_6\cdot L_8)\cdot L_9$ רגולריות ומסגירות משפחת השפות הרגולריות לאיחוד גם $L_5\cdot L_7\cdot L_9\cup L_6\cdot L_8\cdot L_9$ רגולרית.

ב. L_2 חופשית הקשר. ניתן להציגה באופן הבא:

$L_{10}=\{a^nb^n \mid n\geq 0\}$

$L_9=\{c^i \mid i \geq 0\}$

$L_{11}=\{a^i \mid i \geq 0\}$

$L_{12}=\{b^j c^k \mid k<j, k \geq 0\}$

$L_2=L_{10} \cdot L_9 \cup L_{11} \cdot L_{12}$

L_9 רגולרית – בנינו עבורה אוטומט בסעיף א'. לכן היא גם חופשית הקשר.

L_{11} רגולרית – ע"י אותו אוטומט, עם החלפת כל c ב-a. לכן גם היא ח"ה.

L_{10} חופשית הקשר וכך גם L_{12} – ע"פ ספר הלימוד.

מסגירות משפחת השפות חופשיות ההקשר לשרשור גם $L_{10} \cdot L_9$ וגם $L_{11} \cdot L_{12}$ חופשית הקשר, ומסגירות משפחת השפות חופשיות ההקשר לאיחוד גם $L_2=L_{10} \cdot L_9 \cup L_{11} \cdot L_{12}$ חופשית הקשר.

L_2 אינה רגולרית. נניח בשלילה שהיא רגולרית ולכן קיים אוטומט סופי A שמקבל אותה. נסתכל על קבוצת המילים הבאה: $W=\{a^n \mid n \geq 0\}$ ונניח שקיימות ב-W שתי מילים a^j, a^i $i>j$, כך שהאוטומט מגיע לאותו מצב q עבור a^i ו- a^j. המילה $a^i b^i c^i$ בשפה כי מספר האותיות a בה שווה למספר האותיות b שבה. לכן האוטומט מגיע למצב מקבל בקוראו את הסיפא $b^i c^i$ מהמצב q. לכן הוא מקבל גם את המילה $a^j b^i c^i$, אבל מילה זו אינה בשפה ($j \neq i$, ו-i אינו קטן מ-j) בסתירה להיות A אוטומט שמקבל את השפה. לכן, על כל מילה ב-W האוטומט מגיע למצב שונה, ולכן בהכרח יש ל-A אינסוף מצבים, בסתירה להיותו אוטומט סופי. לכן L אינה רגולרית.

ג. L_3 חופשית הקשר. ניתן להציגה באופן הבא:

$L_{13}=\{a^i b^j c^k \mid j-k \geq i, j \geq k, i,j,k \geq 0, j \bmod 2=0\}$

$L_{14}=\{a^i b^j c^k \mid k-j \geq i, k \geq j, i,j,k \geq 0, j \bmod 2=0\}$

$L_3=L_{13} \cup L_{14}$

L_{13} חופשית הקשר. אוטומט המחסנית שיקבל אותה יעבוד באופן הבא:

יכניס למחסנית אות A על כל אות a שנקראת.

כאשר נקראות אותיות b יתחיל לשלוף אותיות מהמחסנית (תוך בדיקת זוגיות מספר האותיות b בעזרת מצבים מתאימים).

כאשר המחסנית מתרוקנת יתחיל למלא אותה שוב באותיות A (תוך סימון תחתית המחסנית ותוך המשך בדיקת זוגיות מספר האותיות b בעזרת המצבים). כאשר נקראות אותיות c יתחיל לשלוף אותיות מהמחסנית.

אם נקראו אותיות i אותיות a, אז יקראו i אותיות b לפני ריקון המחסנית ועוד j-i אותיות b, ואז k אותיות c. כל עוד המחסנית לא התרוקנה הרי ש- j-i>k, כלומר j-k>i. לכן, כל מצב בו המחסנית לא

ריקה ומספר האותיות b זוגי צריך להיות מצב מקבל. האוטומט לא יאפשר קריאת אותיות c אחרי שהמחסנית התרוקנה.

המצבים:

q_0 – מצב התחלתי בו נקראות אותיות a.

q_1 – מצב לקריאת אותיות b, לפני שהמחסנית התרוקנה, שזוכר שמספר האותיות b שנקראו עד כה זוגי.

q_2 – מצב לקריאת אותיות b, לפני שהמחסנית התרוקנה, שזוכר שמספר האותיות b שנקראו עד כה אי-זוגי.

q_3 – מצב לקריאת אותיות b, בשלב המילוי השני, שזוכר שמספר האותיות b שנקראו עד כה זוגי.

q_4 – מצב לקריאת אותיות b, בשלב המילוי השני, שזוכר שמספר האותיות b שנקראו עד כה אי-זוגי.

q_5 – מצב לקריאת אותיות c.

כל המצבים מקבלים, חוץ מ-q_2 ו-q_4.

מעברים:

קריאת אות a ראשונה –	$(q_0,a,\perp,q_0,A)$
קריאת אות a שניה ויותר –	(q_0,a,A,q_0,AA)
קריאת אות b ראשונה כשלא נקראו אותיות a –	$(q_0,b,\perp,q_4,A)$
קריאת אות b ראשונה כשנקראו אותיות a –	$(q_0,b,A,q_2,\varepsilon)$
קריאת אות b זוגית לפני התרוקנות המחסנית –	$(q_2,b,A,q_1,\varepsilon)$
קריאת אות b אי-זוגית, שלישית ויותר, לפני התרוקנות המחסנית –	$(q_1,b,A,q_2,\varepsilon)$
קריאת אות b זוגית אחרי התרוקנות המחסנית –	$(q_2,b,\perp,q_3,A)$
קריאת אות b אי-זוגית, שלישית ויותר, אחרי התרוקנות המחסנית –	$(q_1,b,\perp,q_4,A)$
קריאת אות b אי-זוגית בשלב המילוי השני –	(q_3,b,A,q_4,AA)
קריאת אות b זוגית בשלב המילוי השני –	(q_4,b,A,q_3,AA)
קריאת אות c ראשונה –	$(q_3,c,A,q_5,\varepsilon)$
קריאת אות c שניה ויותר –	$(q_5,c,A,q_5,\varepsilon)$

נשים לב שקריאת c ראשונה אפשרית רק במצב q_3, המציין מספר זוגי של אותיות b, וכי לא ניתן לקרוא אותיות c כאשר המחסנית ריקה.

עבור L_{14}, נשים לב כי הדרישה $k-j\geq i$ משמעותה $k\geq i+j$. לכן האוטומט ימלא את המחסנית עם קריאת אותיות a ו-b ויורוקן עם קריאת אותיות c. קריאת אותיות b, כמו מקודם, תשולב עם בדיקת זוגיות מספר האותיות b שנקראות. אין צורך גם כאן בסימון תחתית המחסנית, וניתן להמשיך ולקרוא אותיות c אחרי התרוקנות המחסנית.

q_0 – מצב התחלתי

q_1 – מצב לקריאת אותיות a.

q_2 – מצב לקריאת אותיות b, שזוכר כי נקרא מספר זוגי של אותיות b.

q_3 – מצב לקריאת אותיות b, שזוכר כי נקרא מספר אי-זוגי של אותיות b.

q_4 – מצב לקריאת אותיות c, לפני התרוקנות המחסנית.

q_5 – מצב לקריאת אותיות c, אחרי התרוקנות המחסנית.

המצבים המקבלים הם q_0 ו-q_5.

המעברים:

קריאת אות a ראשונה – $(q_0,a,\perp,q_1,A)$

קריאת אות a שניה ויותר – (q_1,a,A,q_1,AA)

קריאת אות b ראשונה, כשלא נקראו אותיות a – $(q_0,b,\perp,q_3,A)$

קריאת אות b ראשונה, כאשר נקראו לפניה אותיות a – (q_1,b,A,q_3,AA)

קריאת אות b זוגית – (q_3,b,A,q_2,AA)

קריאת אות b אי-זוגית שלישית ויותר – (q_2,b,A,q_3,AA)

קריאת אות c ראשונה, כשנקראו אותיות b – $(q_2,c,A,q_4,\varepsilon)$

קריאת אות c ראשונה, כשלא נקראו אותיות b – $(q_1,c,A,q_4,\varepsilon)$

קריאת אות c ראשונה, כשלא נקראו אותיות a ואותיות b – $(q_0,c,\perp,q_5, \varepsilon)$

קריאת אות c שניה ויותר, לפני התרוקנות המחסנית – $(q_4,c,A,q_4, \varepsilon)$

קריאת אות c שניה ויותר, הראשונה לאחר התרוקנות המחסנית – $(q_4,c,\perp,q_5, \varepsilon)$

קריאת אות c שניה ויותר, אחרי התרוקנות המחסנית – $(q_5,c,\perp,q_5, \varepsilon)$

לכן גם L_{14} חופשית הקשר, ומסגירות משפחת השפות חופשיות ההקשר לאיחוד גם $L_3=L_{13}\cup L_{14}$ חופשית הקשר.

L_3 אינה רגולרית. נניח בשלילה שהיא רגולרית ולכן קיים אוטומט סופי A שמקבל אותה. ראשית, נשים לב שמילים בהן מספר האותיות b זוגי, אין בהן אותיות c, ומספר האותיות a בהן שווה למספר האותיות b הן מילים ששייכות לשפה, כי מילים כאלו מקיימות $|j-k| = j = i \ge i$. בדומה, מילים שאין בהן אותיות c ומספר האותיות b בהן קטן ממספר האותיות a אינן בשפה, כי הן מקיימות $|j-k| = j < i$. נתבונן בקבוצת המילים האינסופית הבאה $W=\{a^n \mid n\ge 0\}$. נניח שקיימות בקבוצה זו שתי מילים a^m, a^ℓ, $\ell>m$, כך ש-A מגיע על a^ℓ ו-a^m לאותו מצב q. אם m זוגי נתבונן במילה a^mb^m, אחרת נתבונן במילה a^mab^{m+1}. בשני המקרים המילה הנדונה בשפה כי מספר האותיות b שבה זוגי, אין בה אותיות c ומספר האותיות a שווה למספר האותיות b. נניח ש-m זוגי: מאחר שהאוטומט מקבל את a^mb^m אז קריאת הסיפא b^m במצב q מביאה אותו למצב מקבל. אבל אז האוטומט מקבל גם את

$a^{\ell}b^m$ שאינה בשפה (אמנם מספר האותיות b שבה זוגי, אבל אין בה אותיות c ומספר האותיות b שבה קטן ממספר האותיות a). בדומה, אם m אי-זוגי אז קריאת הסיפא ab^{m+1} במצב q מביאה את האוטומט למצב מקבל ולכן הוא מקבל גם את המילה $a^{\ell}ab^{m+1}$. כלומר $a^{\ell+1}b^{m+1}$. אבל מילה זו אינה בשפה (כמו קודם, אמנם מספר האותיות b שבה זוגי, אבל אין בה אותיות c ומספר האותיות b בה קטן ממספר האותיות a). לכן בהכרח האוטומט מגיע למצב שונה על כל מילה ב-W ולכן בהכרח יש לו אינסוף מצבים בסתירה להיותו אוטומט סופי ולכן בהכרח השפה אינה רגולרית.

ד. L_1 רגולרית ובפרט חופשית הקשר, L_3 חופשית הקשר ומסגירות משפחת השפות חופשיות ההקשר לאיחוד גם $L_4=L_1\cup L_3$ חופשית הקשר.

L_4 אינה רגולרית. ההוכחה הקודמת לא תעבוד, כי גם אחרי הדבקת הסיפא שתי המילים בשפה: בכל המקרים מספר האותיות a שווה למספר האותיות b, ולכן בפרט הזוגיות של מספר האותיות a שווה לזוגיות מספר האותיות b. נוכיח כי היא לא רגולרית באופן הבא:

ראשית, נשים לב כי מילים בהן מספר האותיות b זוגי, אין בהן אותיות c ומספר האותיות a בהן קטן או שווה למספר האותיות b שבהן הן מילים ששייכות לשפה, כי הן מקיימות $|j-k|=j\geq i$. כעת, נניח שהשפה רגולרית ולכן קיים אוטומט סופי A שמקבל אותה. נתבונן בקבוצת המילים האינסופית $W=\{a^n \mid n\geq 0,$ אי-זוגי $n\}$. נניח שיש בקבוצה זו שתי מילים a^m, a^{ℓ} כך ש $m<\ell$ ו- ℓ ו-m אי-זוגיים והאוטומט מגיע על שתי המילים לאותו מצב q. נתבונן במילה $a^mb^{\ell-1}$. ℓ אי-זוגי ולכן $\ell-1$, מספר האותיות b במילה, זוגי. כמו כן בגלל ש- $\ell>m$ אז $\ell-1\geq m$ ולכן מתקיים שמספר האותיות a במילה קטן או שווה למספר האותיות b במילה, ולכן המילה בשפה. כלומר מהמצב q האוטומט מגיע למצב מקבל בקוראו את $b^{\ell-1}$. לכן האוטומט מקבל גם את $a^{\ell}b^{\ell-1}$. מילה זו אינה בשפה – זוגיות מספר האותיות a שונה מזוגיות מספר האותיות b, ובנוסף, אין במילה אותיות c ומספר האותיות b קטן ממספר האותיות a, ולכן, כפי שהראינו בסעיף הקודם, המילה גם אינה ב-L_3. לכן, על כל מילה בקבוצה W האוטומט מגיע למצב שונה, ולכן בהכרח יש לו אינסוף מצבים, בסתירה להיותו אוטומט סופי. לכן, בהכרח L_4 אינה רגולרית.

<u>שאלה 4</u> – <u>תכונות סגירות של שפות רגולריות ושפות חופשיות הקשר</u> (אלה פוק)

נגדיר פעולה על זוגות של שפות מעל אותו א"ב:

$$C(L_1,L_2)=\{xyz \mid xy\in L_1,\ yz\in L_2,\ y\neq \varepsilon\}$$

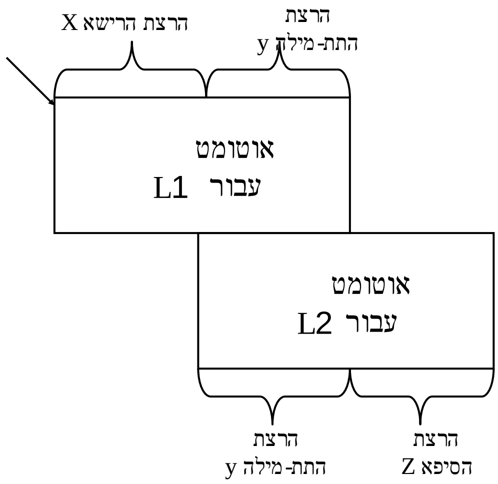
א. הראה כי משפחת השפות הרגולריות סגורה לפעולה C

ב. האם משפחת השפות חופשיות ההקשר סגורה לפעולה C? הוכח את תשובתך

<u>פתרון</u>

א. זהו סעיף קשה מאוד המתאים לעבודת כיתה וכבסיס לדיון בכיתת מצויינים. אפשר לתת את השאלה גם ללא סעיף א'. כלומר, לנסח זאת כך:

"ידוע כי משפחת השפות הרגולריות סגורה לפעולה C. האם משפחת השפות חופשיות ההקשר וכו'...". במקרה זה רצוי לפחות לדון בכיתה מדוע אינטואיטיבית יש סגירות לפעולה בשפות רגולריות. האינטואיציה מדוע יש סגירות היא שאפשר להרכיב את שני האוטומטים שמקבלים את L_1 ו-L_2 לאוטומט עבור $C(L_1,L_2)$ באופן הבא: להתחיל לרוץ באוטומט עבור L_1. באיזשהו שלב, באופן אי-דטרמיניסטי, לנחש שקטע הקלט הבא גם מסיים מילה ב-L_1 וגם מתחיל מילה ב-L_2, ולהריץ אותו במקביל (בדומה לאוטומט מכפלה) בשני האוטומטים, ובאיזשהו שלב, באופן אי-דטרמיניסטי, כאשר נמצאים במצב מקבל באוטומט הראשון, לנחש כי נכנסים לסיפא של המילה, המסיימת את המילה ב-L_2 ולעבור לרוץ רק באוטומט עבור L_2.



ההוכחה היא לכן קונסטרוקטיבית: כדי להראות שאם L_1 ו-L_2 רגולריות אז גם $C(L_1,L_2)$ רגולרית מראים שבהינתן אוטומטים סופיים עבור L_1 ו-L_2 – A_1 ו-A_2 בהתאמה, ניתן מהם לבנות אוטומט שמקבל את $C(L_1,L_2)$.

קבוצת המצבים של האוטומט החדש A תכיל את כל המצבים של A_1, כל המצבים של A_2, ובנוסף את כל זוגות המצבים המכילים מצב מ-A_1 ומצב מ-A_2 (כמו באוטומט מכפלה לקבלת שפת חיתוך או איחוד). כלומר, אם למשל ל-A_1 מצבים q_0 ו-q_1 ול-A_2 מצבים p_0 ו-p_1 אז ל-A יהיו המצבים: q_1p_1, q_1p_0, q_0p_1, q_0p_0, p_1, p_0, q_1, q_0.

הא"ב יהיה כמובן הא"ב של כל אחד מהאוטומטים (עפ"י הנתון, השפות הנתונות הן מעל אותו א"ב).

המעברים יוגדרו באופן הבא:

כל המעברים של A_1 וכל המעברים של A_2 יהיו גם מעברים של האוטומט החדש, כדי שניתן יהיה להריץ את הרישא ב-A_1 ואת הסיפא ב-A_2. בנוסף, לכל מעבר (q_i, σ_r, q_j) ב-A_1 ומעבר (p_ℓ, σ_r, p_m) ב-A_2 יהיה ב-A מעבר $(q_ip_\ell, \sigma_r, q_jp_m)$. אלו מעברים שנועדו להרצה במקביל של התת-מילה האמצעית ב-A_1 וב-A_2.

יש צורך גם במעברי חיבור. ראשית – מעברי הכניסה להרצה במקביל: אם (q_i, σ_r, q_j) הוא מעבר של A_1 ו- (p_0, σ_r, p_m) הוא מעבר מהמצב ההתחלתי של A_2 אז ב-A יהיה המעבר (q_i, σ_r, q_jp_m).

מעברי היציאה מההרצה במקביל: אם (p_ℓ, σ_r, p_m) הוא מעבר של A_2 ו-q_i הוא מצב מקבל של A_1 אז ב-A יהיה המעבר $(q_ip_\ell, \sigma_r, p_m)$.

מהם המצבים המקבלים? בוודאי שכל המצבים המקבלים של A_2 הם מצבים מקבלים של האוטומט החדש.

בנוסף, יתכן שמילה מסויימת עונה על הגדרת $C(L_1,L_2)$ בעזרת $z=\varepsilon$. כלומר, המילה היא $x\cdot y$ כך ש- $x\cdot y\in L_1$ ו- $y\in L_2$. כדי לקבל מילים כאלו יש לקבלן בסיום ההרצה במקביל, ולא לבצע הרצת סיפא ב-A_2. לכן אם q_i מצב מקבל של A_1 ו-p_ℓ מצב מקבל של A_2, גם המצב q_ip_ℓ צריך להיות מצב מקבל של A. ברור שהמצב ההתחלתי של A_1 צריך להיות גם המצב ההתחלתי של האוטומט החדש A.

אם אכן מוכיחים את הסגירות לפעולה C כדאי להדגים את הבנייה על שני אוטומטים פשוטים ובפרט להתייחס לנקודות הבאות: כיצד מתקבלת באוטומט מילה עבורה $z=\varepsilon$? (לשאלה זו התייחסנו לעיל, בהגדרת קבוצת המצבים המקבלים), מילה עבורה $x=\varepsilon$? (מעברי הכניסה להרצה במקביל כוללים גם מעברים מ- q_0, המצב ההתחלתי של A_1, ומשמעותם שכבר האות הראשונה מורצת במקביל הן ב-A_1 והן ב-A_2).

ניתן היה להשמיט את ההגבלה $y\neq\varepsilon$. השפות הרגולריות עדיין סגורות לפעולה C גם אחרי השינוי, אך אז הבנייה מעט יותר מורכבת. בנוסף, אז גם סעיף ב' הופך לסעיף קשה מדי.

ב. השפות חופשיות ההקשר אינן סגורות לפעולה C. נתבונן למשל בדוגמה הבאה:

$$L_1=\{a^nb^n \mid n>0\} \qquad L_2=\{b^nc^n \mid n>0\}$$

$$C(L_1,L_2) = \{a^nb^nc^n \mid n>0\}$$

וכמובן שבמקרה זה $C(L_1,L_2)$ אינה חופשית הקשר.

בהמשך להערה בסוף פתרון סעיף א'. נשים לב שאם אנחנו מרשים $y=\varepsilon$ אז $C(L_1,L_2)$ אינה השפה $\{a^nb^nc^n \mid n>0\}$. במקרה זה גם מילים מהצורה $x\cdot z$ כאשר $x\in L_1$ ו- $z\in L_2$ שייכות ל-$C(L_1,L_2)$, כי ניתן להציג כ-$x\cdot\varepsilon \in L_1$, $\varepsilon\cdot z\in L_2$. לכן $C(L_1,L_2)$ מכילה גם מילים מהצורה $a^nb^nb^mc^m$. גם במקרה זה $C(L_1,L_2)$ אינה חופשית הקשר אך אין לתלמידים את הכלים להראות זאת.

<u>שאלה 5</u>– <u>הוכחות אי רגולריות + שימוש בתכונות סגירות</u> (ריקה רם)

תהי L שפת כל המילים מעל הא"ב $\{a,b,c\}$ שמתחילות ומסתיימות ברצף מעל הא"ב $\{a,b\}$ שמכיל לפחות אות a אחת ואות b אחת, וחלקן האמצעי הוא רצף של אותיות c ואחריו רצף של אותיות b שווה לו באורכו. האם L רגולרית? חופשית הקשר שאינה רגולרית? הוכח את תשובתך.

<u>פתרון</u>

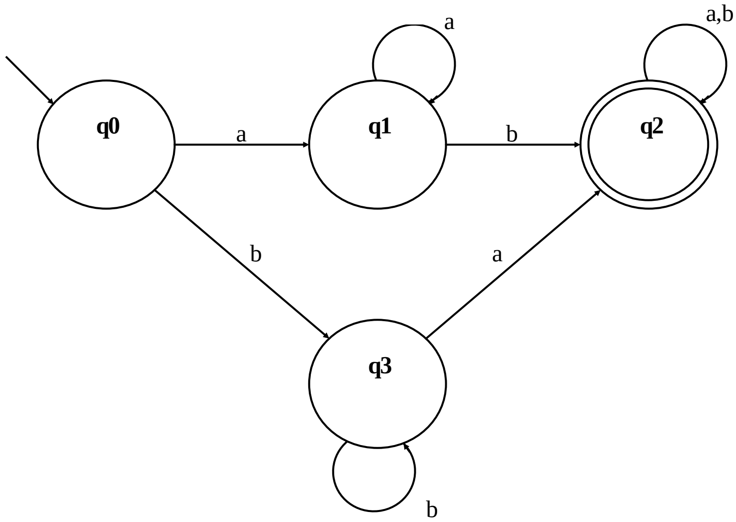
ניתן להציג את L בעזרת שתי השפות הבאות:

L_1 - שפת כל המילים מעל הא"ב $\{a,b\}$ שמכילות לפחות אות a אחת ואות b אחת.

L_2 - $\{c^nb^n \mid n\geq 0\}$

$L=L_1\cdot L_2\cdot L_1$

L_1 רגולרית ולכן חופשית הקשר – הנה אוטומט סופי שמקבל אותה:



L_2 חופשית הקשר. ניתן לקבל אוטומט מחסנית שמקבל אותה מהאוטומט שנתון בספר עבור השפה $\{a^nb^n \mid n\geq 0\}$ על ידי החלפת כל a ב- c.

מסגירות משפחת השפות חופשית ההקשר לשרשור גם $L_1\cdot L_2$ חופשית הקשר ולכן גם $(L_1\cdot L_2)\cdot L_1$ חופשית הקשר.

אבל L אינה רגולרית. נניח שהיא רגולרית ולכן קיים אוטומט סופי A שמקבל אותה. נתבונן בקבוצת המילים האינסופית הבאה - $W=\{abc^n \mid n\geq 0\}$. נניח שקיימות בקבוצה זו שתי מילים abc^i, abc^j כך ש- $i\neq j$ והאוטומט מגיע על שתיהן לאותו מצב q. נתבונן במילה abc^jb^jab. זו מילה בשפה ולכן מהמצב q האוטומט מגיע למצב מקבל בקוראו את הסיפא b^jab. אבל אז גם המילה abc^ib^jab מתקבלת למרות שאינה שייכת לשפה. לכן בהכרח האוטומט מגיע למצב שונה עבור כל מילה ב-W, כלומר יש לו אינסוף מצבים, בסתירה להיותו אוטומט סופי. לכן, L אינה רגולרית.

שימו לב – אם היינו מדביקים את הסיפא b^jba אז המילה abc^jb^jba אכן בשפה, אך ייתכן שגם המילה abc^ib^jba בשפה אם במקרה $i+1=j$.

<u>שאלה 6</u> – <u>הוכחת אי רגולריות + בניית אוטומט מחסנית</u> (ריקה רם)

תהי L שפת כל המילים מעל הא"ב $\{a,b,c\}$ אשר מתחילות ברצף אותיות מעל הא"ב $\{a,b\}$ שמכיל לפחות אות a אחת ואות b אחת, מסתיימות ברצף אותיות מעל הא"ב $\{a,c\}$ שמכיל לפחות אות a אחת ואות c אחת, אורך הרצף הפותח שווה לאורך הרצף הסוגר, והחלק האמצעי של המילה הוא רצף אותיות c ואחריו רצף אותיות b שווה לו באורכו.

האם השפה רגולרית? חופשית הקשר שאינה רגולרית? הוכיחו את תשובתכם.

<u>פתרון</u>

השפה אינה רגולרית. נניח שהיא רגולרית וקיים אוטומט סופי A שמקבל אותה. נתבונן בקבוצת המילים האינסופית $W=\{abc^n \mid n\geq 0\}$ ונניח שקיימות בקבוצה זו שתי מילים abc^i, abc^j, $i\neq j$ כך שהאוטומט מגיע על שתיהן לאותו מצב q. נתבונן במילה abc^ib^iac. מילה זו בשפה, ולכן כאשר האוטומט קורא את הסיפא b^iac במצב q הוא מגיע למצב מקבל. לפיכך הוא מקבל גם את המילה abc^jb^iac שאינה בשפה. לכן, בהכרח האוטומט מגיע למצב שונה על כל מילה ב-W ולכן בהכרח יש לו אינסוף מצבים בסתירה להיותו אוטומט סופי. לכן L אינה רגולרית.

L חופשית הקשר. נבנה אוטומט מחסנית לא דטרמיניסטי שמקבל אותה.

לאוטומט עשרה מצבים:

q_0 – מצב התחלתי.

q_1 – מצב המציין קריאת הרצף הפותח כאשר נקראה כבר לפחות אות a אחת.

q_2 – מצב המציין קריאת הרצף הפותח כאשר נקראה כבר לפחות אות b אחת.

q_3 – מצב המציין קריאת הרצף הפותח כאשר נקראו לפחות אות a אחת ואות b אחת.

q_4 – מצב המציין קריאת רצף האותיות c בחלקה האמצעי של המילה.

q_5 – מצב המציין קריאת רצף האותיות b בחלקה האמצעי של המילה.

q_6 – מצב המציין קריאת הרצף הסוגר כאשר נקראה כבר לפחות אות a אחת.

q_7 – מצב המציין קריאת הרצף הסוגר כאשר נקראה כבר לפחות אות c אחת.

q_8 – מצב המציין קריאת הרצף הסוגר כאשר נקראו לפחות אות c אחת ואות a אחת ואורך הרצף הסוגר קטן מאורך הרצף הפותח.

q_9 – מצב המציין קריאת הרצף הסוגר כאשר נקראו לפחות אות c אחת ואות a אחת ואורך הרצף הסוגר שווה לאורך הרצף הפותח.

q_9 – הוא המצב המקבל היחיד. א"ב המחסנית הוא {S,A,B}.

קבוצת המעברים:

קריאת אות ראשונה, והיא a –	$(q_0,a,\perp,q_1,S)$
קריאת אות ראשונה, והיא b –	$(q_0,b,\perp,q_2,S)$
קריאת אות a שנייה, כאשר עדיין לא נקראו אותיות b –	(q_1,a,S,q_1,SA)
קריאת a שלישית ויותר, כאשר עדיין לא נקראו אותיות b –	(q_1,a,A,q_1,AA)
קריאת b שנייה, כאשר עדיין לא נקראו אותיות a –	(q_2,b,S,q_2,SA)
קריאת b שלישית ויותר, כאשר עדיין לא נקראו אותיות a –	(q_2,b,A,q_2,AA)
קריאת b ראשונה, כאשר נקראה אות a אחת –	(q_1,b,S,q_3,SA)
קריאת b ראשונה, כאשר נקראה יותר מאות a אחת –	(q_1,b,A,q_3,AA)
קריאת a ראשונה, כאשר נקראה b אחת –	(q_2,a,S,q_3,SA)
קריאת a ראשונה, כאשר נקראה יותר מאות b אחת –	(q_2,a,A,q_3,AA)
קריאת a, כאשר נקראו לפניה לפחות a אחת ולפחות b אחת –	(q_3,a,A,q_3,AA)

קריאת b, כאשר נקראו לפניה לפחות a אחת ולפחות b אחת – (q_3,b,A,q_3,AA)

ניחוש כי ה- a הבאה מתחילה את הרצף הסוגר של המילה, וכי החלק האמצעי ריק – $(q_3,a,A,q_6,\varepsilon)$

קריאת c ראשונה בחלק האמצעי של המילה – (q_3,c,A,q_4,AB)

ניחוש כי ה- c הבאה מתחילה את הרצף הסוגר של המילה, וכי החלק האמצעי ריק – $(q_3,c,A,q_7,\varepsilon)$

קריאת c שניה ויותר בחלק האמצעי של המילה – (q_4,c,B,q_4,BB)

קריאת b ראשונה בחלק האמצעי של המילה – $(q_4,b,B,q_5,\varepsilon)$

קריאת b שניה ויותר בחלק האמצעי – $(q_5,b,B,q_5,\varepsilon)$

קריאת אות ראשונה ברצף הסוגר, והיא a – $(q_5,a,A,q_6,\varepsilon)$

קריאת אות ראשונה ברצף הסוגר, והיא c – $(q_5,c,A,q_7,\varepsilon)$

קריאת a שניה ויותר ברצף הסוגר, כאשר עדיין לא נקראו אותיות c – $(q_6,a,A,q_6,\varepsilon)$

קריאת c ראשונה ברצף הסוגר, כאשר נקראו לפניה אותיות a, ולפני ריקון המחסנית – $(q_6,c,A,q_8,\varepsilon)$

קריאת c ראשונה ברצף הסוגר, שמביאה לריקון המחסנית, כאשר לפניה נקראו אותיות a – $(q_6,c,S,q_9,\varepsilon)$

קריאת c שניה ויותר ברצף הסוגר, כאשר עדיין לא נקראו אותיות a – $(q_7,c,A,q_7,\varepsilon)$

קריאת a ראשונה ברצף הסוגר, כאשר נקראו לפניה אותיות c ולפני ריקון המחסנית – $(q_7,c,A,q_8,\varepsilon)$

קריאת a ראשונה ברצף הסוגר, שמביאה לריקון המחסנית, כאשר לפניה נקראו אותיות c – $(q_7,a,S,q_9,\varepsilon)$

קריאת a ברצף הסוגר, כאשר לפניה נקראו לפחות a אחת ולפחות c אחת, ועוד לא התרוקנה המחסנית – $(q_8,a,A,q_8,\varepsilon)$

קריאת c ברצף הסוגר, כאשר לפניה נקראו לפחות a אחת ולפחות c אחת, ועוד לא התרוקנה המחסנית – $(q_8,c,A,q_8,\varepsilon)$

קריאת a ברצף הסוגר, שמביאה לריקון המחסנית, כאשר לפניה נקראו לפחות a אחת ולפחות c אחת – $(q_8,a,S,q_9,\varepsilon)$

קריאת c ברצף הסוגר, שמביאה לריקון המחסנית, כאשר לפניה נקראו לפחות a אחת ולפחות c אחת – $(q_8,c,S,q_9,\varepsilon)$

<u>שאלה 7</u> – <u>הוכחות אי רגולריות + בניית אוטומט מחסנית + תכונות סגירות של שפות חופשיות הקשר</u>

(אסנת אנגלמן, אסתי מאסטראסי, אורנה שטיין)

א. הצע פתרון לכוריאוגרף: לצורך ריקוד "אגם הברבורים" הוא מוכן לקבל כל מספר של רקדנים ורקדניות ובלבד שניתן לחלקם לזוגות (בן ובת) כך שישארו לכל היותר שלושה רקדנים או שלוש רקדניות ללא בנות או בני זוג. נסח שפה המתאימה לדרישת הכוריאוגרף.

ב. האם השפה שניסחת בסעיף א' היא רגולרית או חופשית הקשר שאינה רגולרית? הוכח את קביעתך.

<u>פתרון</u>

א. L היא שפת כל המילים מעל הא"ב {a,b} אשר בהן ההפרש בין מספר האותיות a למספר האותיות b אינו עולה על 3.

ב. L אינה רגולרית. ההוכחה עבור השפה שהוגדרה בסעיף ב' בתרגיל 3.14 בספר לתלמיד (התרגיל פתור במדריך למורה) מתאימה גם עבור השפה L.

L חופשית הקשר כי ניתן להציגה באופן הבא: $L=L_1\cup L_2$ כאשר L_1 ו-L_2 שתיהן מעל הא"ב {a,b}:

L_1 : שפת כל המילים מעל הא"ב {a,b} בהן מספר האותיות a אינו עולה על מספר האותיות b, וההפרש בין מספר האותיות a למספר האותיות b הוא לכל היותר 3.

L_2 : שפת כל המילים מעל הא"ב {a,b} בהן מספר האותיות b אינו עולה על מספר האותיות a, וההפרש בין מספר האותיות a למספר האותיות b הוא לכל היותר 3.

נראה אוטומט מחסנית עבור L_1. אוטומט מחסנית עבור L_2 יתקבל ממנו ע"י החלפת כל a ב-b וכל b ב-a. האוטומט יהיה לא דטרמיניסטי והוא יעבור עפ"י העיקרון הבא:

במילה בשפה ייתכן שמספר האותיות b שווה למספר האותיות a, יתכן שמספר האותיות b גדול ב-1 ממספר האותיות a, יתכן שהוא גדול ב-2 ממספר האותיות a או גדול ב-3 ממספר האותיות a.

עם קריאת האות הראשונה (a או b) האוטומט ינחש מה ההפרש בין מספר האותיות a למספר האותיות b (2,1,0 או 3 לטובת האותיות b) ובהתאם לכך יכניס מילה למחסנית. פרט לצעד זה האוטומט זהה לאוטומט שניתן במדריך למורה לפתרון תרגיל 5.19 מהספר לתלמיד.

לאוטומט זה יהיה מצב התחלתי חדש q_0' – נוסף למצבים q_0 ו-q_1 (q_0 כבר לא מצב התחלתי).

יהיו לאוטומט זה המעברים הבאים:

מנחש הפרש 0 –	$(q_0',a,\perp,q_1, S)$
מנחש הפרש 1 –	$(q_0',a,\perp,q_0,\varepsilon)$
מנחש הפרש 2 –	$(q_0',a,\perp,q_1,T)$
מנחש הפרש 3 –	$(q_0',a,\perp,q_1,TB)$
מנחש הפרש 0 –	$(q_0',b,\perp,q_1,T)$
מנחש הפרש 1 –	$(q_0',b,\perp,q_1,TB)$
מנחש הפרש 2 –	$(q_0',b,\perp,q_1,TBB)$
מנחש הפרש 3 –	$(q_0',a,\perp,q_1,TBBB)$

בנוסף למעברים אלו יהיו המעברים המקוריים של האוטומט בפתרון תרגיל 5.19. המצבים המקבלים הם q_0' ו- q_0.

<u>שאלה 8</u> – (<u>הוכחות אי רגולריות + תכונות סגירות של שפות רגולריות</u>) (דורון זוהר)

א. נתבונן בשפת כל המילים מעל הא"ב {a,b,c} המקיימות את כל ארבעת התנאים הבאים:

I. מספר המופעים של האות c במילה הוא זוגי.

II. אורך המילה גדול מ-1.

III. המילה מתחילה באות c.

IV. אם נסמן ב-n את מספר המופעים של האות a במילה אז מספר המופעים של האות b הוא ndiv3.

האם השפה רגולרית? הוכח את תשובתך.

ב. נתבונן בשפה מעל הא"ב {a,b,c} המוגדרת כמו השפה בסעיף א' פרט לכך שסעיף IV הוא התנאי: אם נסמן ב-n את מספר המופעים של האות a במילה אז מספר המופעים של האות b במילה הוא nmod3.

האם השפה רגולרית? הוכח את תשובתך.

<u>פתרון</u>

א. השפה אינה רגולרית. נניח בשלילה שהיא רגולרית ולכן קיים אוטומט סופי A שמקבל אותה. נתבונן בקבוצת המילים האינסופית $W=\{cca^{3i} \mid i\geq 0\}$. נניח בשלילה שקיימות בקבוצה זו שתי מילים cca^{3i}, cca^{3j} כך ש- $i\neq j$, והאוטומט A מגיע על שתיהן לאותו מצב q. נתבונן במילה $cca^{3i}b^i$. זו מילה השייכת לשפה משום שאורכה גדול מ-1, היא מתחילה באות c, מספר המופעים של האות c בה הוא 2 וזה מספר זוגי, ומספר מופעי האות a במילה הוא 3i ומספר מופע האות b במילה הוא $(3i)div3=i$. לכן מהמצב q האוטומט מגיע למצב מקבל בקוראו את הסיפא b^i. אבל מכאן נובע שהאוטומט מקבל גם את המילה $cca^{3i}b^j$ שאינה שייכת לשפה – אמנם היא מקיימת את שלושת התנאים הראשונים, אך $j\neq(3i)div3$ ולכן היא אינה מקיימת את התנאי האחרון. לכן, על כל מילה ב-W האוטומט מגיע למצב שונה ומכיוון ש-W אינסופית, נובע שלאוטומט A אינסוף מצבים, בסתירה להיותו אוטומט סופי. לכן בהכרח השפה אינה רגולרית.

ב. השפה שמוגדרת בסעיף זה היא שפה רגולרית. ניתן להגדירה בעזרת ארבע השפות הבאות, כולן מעל הא"ב {a,b,c}:

L_1 : שפת כל המילים שמספר האותיות c בהן הוא זוגי.

L_2 : שפת כל המילים שאורכן גדול מ-1.

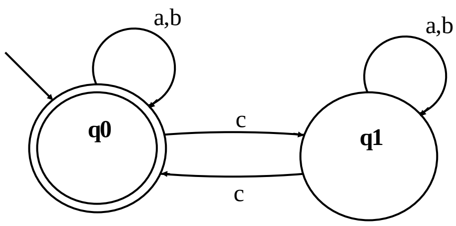
L_3 : שפת כל המילים שמתחילות ב-c.

L_4 : שפת כל המילים שמספר מופעי האות b בהן שווה לשארית של מספר האותיות a במילה מחולק ב-3.

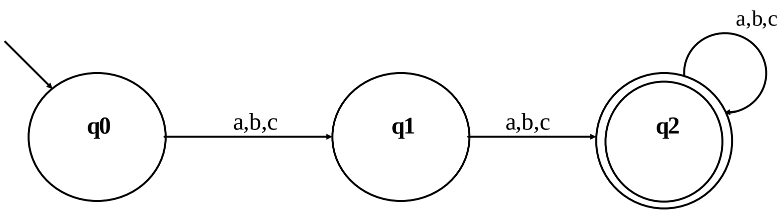
ברור כי $L_1=((L_1\cap L_2)\cap L_3)\cap L_4$

כל השפות רגולריות. הנה אוטומטים מתאימים עבורן:

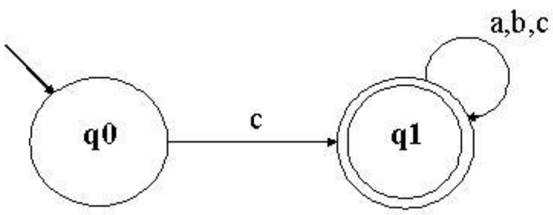
A_1 עבור L_1:



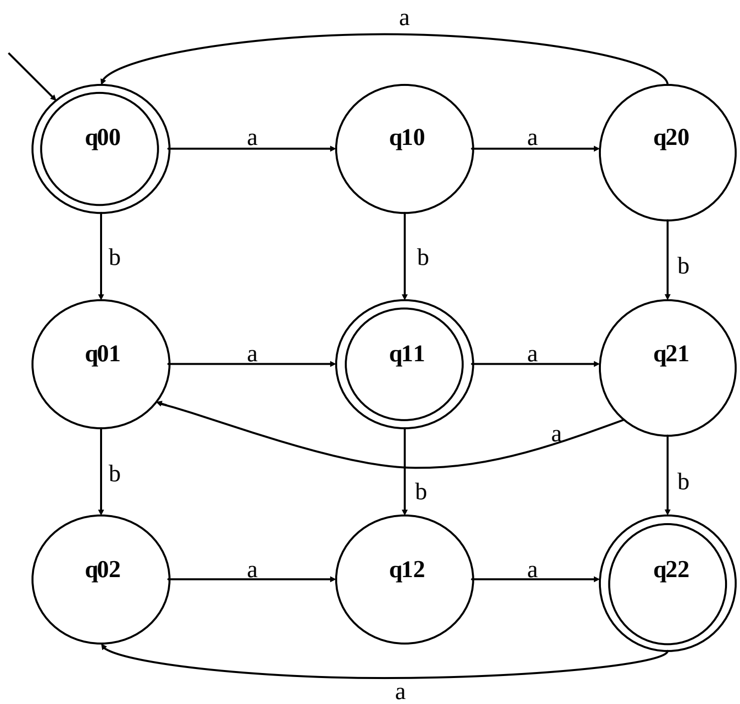
A_2 עבור L_2:



A_3 עבור L_3: עיגול 1Q צריך להיות כפול



A_4 עבור L_4:



באוטומט A_4 עבור L_4 המצב q_{ij} זוכר כי השארית של מספר האותיות a שנקראו בחלוקה ב-3 היא i, ומספר האותיות b שנקראו הוא j.

מסגירות משפחת השפות הרגולריות לפעולת החיתוך גם $L_1 \cap L_2$, $(L_1 \cap L_2) \cap L_3$ ו-$((L_1 \cap L_2) \cap L_3) \cap L_4$ רגולריות.

<u>שאלה 9</u> (דורון זוהר)

לגבי כל אחת מהטענות הבאות קבע אם היא נכונה או לא. אם היא נכונה, הוכח זאת, ואם היא שגויה – הבא דוגמא נגדית מתאימה.

א. כל שפה חופשית הקשר היא רגולרית.
ב. כל שפה רגולרית מתקבלת ע"י אוטומט מחסנית דטרמיניסטי.
ג. כל שפה המתקבלת ע"י אוטומט מחסנית דטרמיניסטי מתקבלת גם על ידי אוטומט מחסנית לא דטרמיניסטי.
ד. כל שפה המתקבלת ע"י אוטומט מחסנית לא דטרמיניסטי מתקבלת גם ע"י אוטומט מחסנית דטרמיניסטי.
ה. כל שפה המתקבלת ע"י אוטומט מחסנית דטרמיניסטי לא מלא היא שפה חופשית הקשר.
ו. כל שפה המתקבלת ע"י מכונת טיורינג היא שפה חופשית הקשר.
ז. כל שפה המתקבלת ע"י אוטומט סופי היא שפה חופשית הקשר.

<u>פתרון</u>

א. הטענה אינה נכונה – השפה $\{a^nb^n \mid n\geq 0\}$ היא שפה חופשית הקשר (יש עבורה אוטומט מחסנית בסעיף 5.2 בספר הלימוד) שאינה רגולרית (מוכח בספר הלימוד בסעיף 3.2).

ב. הטענה נכונה – כל שפה רגולרית מתקבלת ע"י אוטומט סופי דטרמיניסטי וניתן להסב אותו לאוטומט מחסנית דטרמיניסטי שכלל אינו משתמש במחסנית (זהו למעשה כיוון אחד בפתרון תרגיל 6.1 מספר הלימוד).

ג. הטענה נכונה – אוטומט מחסנית דטרמיניסטי הוא בפרט אוטומט מחסנית לא דטרמיניסטי.

ד. הטענה אינה נכונה – השפה $\{w\cdot R(w) \mid$ w מילה מעל הא"ב $\{a,b\}\}$ היא שפה המתקבלת ע"י אוטומט מחסנית לא דטרמיניסטי (דוגמה 5.4 בספר הלימוד), אך לא קיים אוטומט מחסנית דטרמיניסטי שמקבל אותה (כנאמר בספר הלימוד).

ה. הטענה נכונה – אוטומט מחסנית דטרמיניסטי לא מלא הוא בפרט אוטומט מחסנית לא דטרמיניסטי ולכן כל שפה המתקבלת על ידו היא חופשית הקשר.

ו. הטענה אינה נכונה – השפה $\{a^nb^nc^n \mid n\geq 0\}$ היא שפה שמתקבלת ע"י מכונת טיורינג (דוגמה 7.2 בספר הלימוד), אך כפי שנאמר בפרק 6 בספר הלימוד (דוגמה 6.1) היא אינה חופשית הקשר.

ז. הטענה נכונה – שפה המתקבלת ע"י אוטומט סופי, מתקבלת גם ע"י אוטומט מחסנית – כי ניתן להסב את האוטומט הסופי לאוטומט מחסנית שכלל אינו משתמש במחסנית (כפי שנעשה בסעיף 6.1 בספר הלימוד) ולכן היא חופשית הקשר.

השאלה טובה מאוד כשאלה מסכמת. ההוכחות הנדרשות או הדוגמאות המתאימות אינן קשות וכמעט כולן מופיעות בספר הלימוד, אך היא מוודאת שלתלמיד יש תמונה כללית נכונה לגבי כוח החישוב של המודלים השונים והיחס ביניהם.