החומרים שלפניכם הוכנו על-ידי מורים מובילים שהשתתפו בקורס תשס"ג, בהנחיית ד"ר מיכל ארמוני מהאוניברסיטה הפתוחה. ניתן להשתמש בחומרים לצורך הוראה אבל אסור לעשות בהם כל שימוש מסחרי ללא קבלת אישור מראש מהמחברים.

<u>הוכחות אי-רגולריות</u>

<u>שאלה 1</u> (איריס ברגורי)

נתבונן בשפה מעל הא"ב $\{a,b,c\}$ המכילה בדיוק את כל המילים w שמקיימות את <u>שני</u> התנאים הבאים:

1. מספר האותיות b ב- w מתחלק ב-3 עם שארית 2.
2. מספר האותיות c ב- w הוא כפול ממספר האותיות b ב- w.

האם שפה זו היא רגולרית? הוכח את תשובתך.

<u>פתרון</u>

נניח בשלילה כי השפה רגולרית ולכן קיים אוטומט סופי A שמקבל אותה. נתבונן בקבוצת המילים $W=\{b^{3n+2} | n\geq 0\}$. נראה שעל כל מילה בקבוצה W האוטומט A מגיע למצב שונה. נניח בשלילה כי קיימות שתי מילים ב-W $w_i=b^{3i+2}$ ו- $w_j=b^{3j+2}$. כך ש- $i\neq j$, $i,j\geq 0$ והאוטומט A מגיע על w_i ו- w_j לאותו מצב q.

נתבונן במילה $b^{3i+2}c^{6i+4}$. אחרי קריאת הרישא b^{3i+2} מגיע האוטומט למצב q, ומשם עליו להגיע למצב מקבל עם סיום קריאת המילה כולה, כי המילה כולה שייכת לשפה ($2\cdot(3i+2)=6i+4$, ולכן מספר האותיות c במילה כפול ממספר האותיות b, ומספר האותיות b במילה מתחלק ב- 3 עם שארית 2). מכאן נובע כי גם המילה $b^{3j+2}c^{6i+4}$ מובילה את האוטומט למצב מקבל, אבל מילה זו אינה בשפה ($i\neq j$ ולכן $6i+4\neq 2\cdot(3j+2)$), ולכן הגענו לסתירה. לכן בהכרח האוטומט A מגיע למצב שונה על כל מילה בקבוצה W. מאחר ש- W אינסופית, נובע מכאן של- A אינסוף מצבים, בסתירה להיותו אוטומט סופי. לכן הנחת השלילה הראשונה בהכרח שגויה, כלומר, השפה אינה רגולרית.

<u>שאלה 2</u> (איריס ברגורי)

לפניך שפות מעל הא"ב $\{a,b,c\}$. לכל אחת מהשפות קבע אם היא רגולרית או לא, והוכח את קביעתך.

1. השפה $\{a^nb^mc^k | n,m,k>0,k=2n+3\}$
2. השפה $\{a^nb^mc^k | n,m,k>0,k=2n+m+3\}$
3. השפה $\{a^nb^mc^k | n,m,k>0,k=2n-m+3,2n>m\}$

<u>פתרון</u>

1. השפה אינה רגולרית. נניח בשלילה שהיא רגולרית ולכן קיים אוטומט סופי A שמקבל אותה. נתבונן בקבוצת המילים האינסופית $W=\{a^nb | n>0\}$. נראה שעל כל מילה בקבוצה W

האוטומט מגיע למצב שונה. נניח בשלילה שקיימות בקבוצה שתי מילים $w_i=a^ib$ ו- $w_j=a^jb$ כך ש- $i\neq j$, $i,j>0$ והאוטומט A מגיע על w_j ו- w_i לאותו מצב q. נתבונן במילה a^ibc^{2i+3}. המילה שייכת לשפה ולכן האוטומט A מגיע עליה למצב מקבל. כלומר, קריאת הסיפא c^{2i+3} מובילה את האוטומט ממצב q למצב מקבל. אבל, מכאן נובע שהאוטומט A מקבל גם את המילה a^jbc^{2i+3} שאינה שייכת לשפה. הגענו לסתירה ולכן הנחת השלילה השניה אינה נכונה – כלומר, לא קיימות מילים w_i ו-w_j כמפורט לעיל ועל כל מילה בקבוצה W האוטומט מגיע למצב שונה. אך W אינסופית, ומכאן נובע של- A אינסוף מצבים בסתירה להיותו אוטומט סופי. לכן, גם הנחת השלילה הראשונה שגויה והשפה אינה רגולרית.

2. השפה אינה רגולרית. שוב נניח בשלילה שהיא רגולרית ונסיק את קיומו של אוטומט סופי A שמקבל אותה. נתבונן באותה קבוצה אינסופית $W=\{a^nb|n>0\}$ ונראה ש- A מגיע למצב שונה על כל מילה ב-W. נניח בשלילה שקיימות שתי מילים $w_i=a^ib$ ו- $w_j=a^jb$ כך ש- $i\neq j$, $i,j>0$ ו- A מגיע על w_i ו- w_j לאותו מצב q. עתה נתבונן במילה a^ibc^{2i+4}. מילה זו שייכת לשפה כי $2i+4=2i+1+3$. לכן מהמצב q האוטומט מגיע עם קריאת הסיפא c^{2i+4} למצב מקבל. אבל, מכאן נובע שגם המילה a^jbc^{2i+4} מובילה את האוטומט למצב מקבל, למרות שאינה בשפה. הגענו לסתירה ולכן הנחת השלילה השניה אינה נכונה – כלומר, על כל מילה ב- W האוטומט A מגיע למצב אחר. מכאן נובע של- A אינסוף מצבים בסתירה להיותו אוטומט סופי. לכן הנחת השלילה הראשונה בהכרח שגויה ולכן השפה אינה רגולרית.

3. גם שפה זו אינה רגולרית. גם הפעם נניח בשלילה שהיא רגולרית ונסיק מכאן את קיומו של אוטומט סופי A שמקבל אותה. נתבונן הפעם בקבוצת המילים האינסופית $W=\{a^nb^3|n>1\}$ ונראה כי על כל מילה בקבוצה זו האוטומט מגיע למצב שונה. נניח בשלילה כי קיימות שתי מילים $w_i=a^ib^3$ ו- $w_j=a^jb^3$ כך ש- $i,j>1$, $i\neq j$ והאוטומט A מגיע על w_i ו- w_j לאותו מצב q. נתבונן במילה $a^ib^3c^{2i}$. מילה זו שייכת לשפה כי $2i=2i-3+3$ ו- $2i>3$ ($i\geq 2$ ולכן $2i\geq 4$ כלומר $2i>3$). לכן האוטומט A מגיע עליה למצב מקבל. כלומר, קריאת הסיפא c^{2i} מהמצב q מובילה את A למצב מקבל. אבל מכאן נובע כי גם המילה a^jbc^{2i} מביאה את A למצב מקבל, למרות שאינה בשפה. הגענו לסתירה ולכן בהכרח A מגיע למצב שונה על כל מילה ב-W. מכאן נובע של-A אינסוף מצבים, בסתירה להיותו אוטומט סופי. סתירה זו מביאה למסקנה שהנחת השלילה הראשונה היתה שגויה. כלומר, השפה אינה רגולרית.

<u>שאלה 3</u> (ויקטוריה צורי)

תהי L שפת כל המילים מעל הא"ב $\{a,b,c,d,e\}$ אשר הן מהצורה exeye, כאשר x היא מילה המורכבת מהתווים a ו- b בלבד ו- y היא מילה המורכבת מהתווים c ו- d בלבד, ומתקיים שמספר המופעים של האות a ב- x שווה למספר המופעים של האות d ב- y. הוכח כי L אינה רגולרית.

פתרון

למעשה, הפתרון של שאלה זו דומה מאוד לפתרון תרגיל 3.13 מהספר לתלמיד ולכן השאלה מתאימה לעבודת כיתה או לשיעורי בית, אם אכן התלמידים כבר ראו פתרון של תרגיל 3.13 (וגם אם לא, הפתרון אינו מאוד שונה מההוכחה הסטנדרטית עבור $\{a^nb^n \mid n\geq 0\}$).

נניח בשלילה ש- L רגולרית, ולכן קיים אוטומט סופי A שמקבל אותה. נתבונן בקבוצה האינסופית הבאה $W=\{ea^n \mid n\geq 0\}$. נניח בשלילה שקיימות בקבוצה זו שתי מילים ea^i, ea^j כך ש- $i\neq j$ שהאוטומט מגיע עליהן לאותו מצב q.

נתבונן במילה ea^ied^ie. המילה בשפה ולכן הסיפא ed^ie מובילה את האוטומט מהמצב q למצב מקבל. אבל מכאן נובע שהאוטומט יקבל גם את המילה ea^jed^ie שאינה בשפה, בסתירה להיותו אוטומט שמקבל את L. לכן בהכרח האוטומט מגיע על כל מילה ב- W למצב שונה, ולכן נובע שיש לו אינסוף מצבים, בסתירה להיותו אוטומט סופי. לכן, בהכרח L אינה רגולרית.

נשים לב שכלל לא השתמשנו באותיות b ו- c בהוכחה!

שאלה 4 (ויקטוריה צורי)

תהי L שפת כל המילים מעל הא"ב $\{a,b,c\}$ המקיימות את התנאי הבא:

מכילות את הרצף ccc, אורכן זוגי והיחס בין מספר מופעי האות a ומספר מופעי האות b במילה הוא לפחות 2.

האם L רגולרית? הוכח את תשובתך.

פתרון

שאלה זו מתאימה לעבודת כיתה ואח"כ לדיון משלים בכיתה. היא אינה מתאימה לשיעורי בית ובודאי לא למבחן משום מורכבותה ורמת התובנה המתימטית שבפתרון. התנאי שאורך המילה זוגי מקשה על הפתרון.

נניח בשלילה ש- L רגולרית ולכן קיים אוטומט סופי A שמקבל אותה. נתבונן בקבוצה האינסופית הבאה $W=\{ccca^{4n} \mid n\geq 0\}$. נניח בשלילה שקיימות בקבוצה זו שתי מילים $ccca^{4i}$ ו- $ccca^{4j}$ כך ש- $i>j$ והאוטומט מגיע על שתיהן לאותו מצב q.

נתבונן במילה $ccca^{4i}cb^{2i}$. המילה בשפה – היא בוודאי מכילה את הרצף ccc, אורכה זוגי ($6i+4=3+4i+1+2i$) ומספר מופעי a בה ($4i$) הוא פי 2 ממספר מופעי b בה ($2i$). לכן האוטומט מגיע מהמצב q עם קריאת הסיפא cb^{2i} למצב מקבל. אבל, מכאן נובע שהאוטומט מקבל גם את המילה $ccca^{4j}cb^{2i}$ והיא אינה בשפה. אמנם, היא מכילה את הרצף ccc, ואורכה זוגי ($4+4j+2i=3+4j+1+2i$), אבל, $j<i$ ולכן $4j<2\cdot 2i$ (כלומר, מספר מופעי האות a קטן מפעמיים מספר מופעי האות b). לכן בהכרח האוטומט A מגיע על כל מילה ב- W למצב שונה, ומכאן נובע שיש לו אינסוף מצבים, בסתירה להיותו אוטומט סופי ולכן בהכרח L אינה רגולרית.

שימו לב: הפתרון משתמש בחזקה 4i למופעי a כדי להבטיח שחלוקת החזקה ב- 2 (2i למופעי b) תיתן בהכרח מספר זוגי!

<u>שאלה 5</u> (אלה פוק)

האם השפה $L=\{a^{2k}(ba)^m(ab)^n | n,m\geq 0, m\neq n+k, k>0\}$ היא שפה רגולרית? הוכח את תשובתך.

<u>פתרון</u>

השפה L אינה רגולרית. נניח בשלילה שהיא רגולרית ולכן קיים אוטומט סופי A שמקבל אותה. נתבונן בקבוצת המילים האינסופית $W=\{a^2 (ba)^m | m\geq 1\}$. נניח שקיימות בקבוצה זו שתי מילים $a^2(ba)^i$ ו- $a^2(ba)^j$ כך ש $i\neq j$, $i,j\geq 1$ ו-A מגיע על שתי המילים האלו לאותו מצב q.

נתבונן במילה $a^2(ba)^i (ab)^{j-1}$. מילה זו שייכת לשפה: $k=1$, $i\geq 1$, ובפרט $i\geq 0$, $j\geq 1$ ולכן $j-1\geq 0$ ו- $i\neq j-1+k=j-1+1=j$. לכן האוטומט צריך להגיע מהמצב q עם קריאת הסיפא $(ab)^{j-1}$ למצב מקבל. אבל אז האוטומט מקבל גם את המילה $a^2(ba)^j (ab)^{j-1}$. מילה זו אינה בשפה כי $j-1+k=j-1+1=j$, לכן בהכרח האוטומט חייב להגיע למצב שונה על כל מילה ב- W ומכאן שיש לו אינסוף מצבים, בסתירה להיותו אוטומט סופי. לכן בהכרח L אינה רגולרית.

<u>שאלה 6</u> (אלה פוק)

האם השפה $L=\{a^{2n}b^{2k}(ab)^t a^m | k,n,t,m\geq 0, t=k\}$ היא רגולרית? הוכח את תשובתך.

<u>פתרון</u>

השפה L אינה רגולרית. נניח בשלילה שהיא רגולרית ולכן קיים אוטומט סופי A שמקבל אותה. נתבונן בקבוצת המילים האינסופית $W=\{b^{2n} | n\geq 0\}$. נניח שקיימות בקבוצה זו שתי מילים b^{2i}, b^{2j} כך ש- $i\neq j$ ו-A מגיע על שתי המילים לאותו מצב q. נתבונן במילה $b^{2i}(ab)^i$. מילה זו שייכת לשפה $(t=k=i, n=m=0)$ ולכן האוטומט מגיע מהמצב q למצב מקבל בקוראו את הסיפא $(ab)^i$. אבל מכאן נובע שהוא מקבל גם את המילה $b^{2j}(ab)^i$ למרות שאינה בשפה כי $i\neq j$. לכן בהכרח האוטומט מגיע למצב שונה על כל מילה ב-W, ולכן יש לו אינסוף מצבים, בסתירה להיותו אוטומט סופי, לכן L אינה רגולרית.

<u>שאלה 7</u> (ריקה רם)

נתונה השפה L מעל הא"ב $\{a,b,c\}$. הוכיחו ש- L אינה רגולרית:

$$L=\{a^m b^n c^\ell b^p | m+\ell=n+p, m\geq n, n\geq 0, \ell, p\geq 0\}$$

<u>פתרון</u>

נניח ש-L רגולרית ולכן קיים אוטומט סופי A שמקבל אותה. נתבונן בקבוצה האינסופית $W=\{a^n | n\geq 0\}$. נניח שקיימות בקבוצה שתי מילים a^j, a^i כך ש- $i\neq j$ והאוטומט מגיע על a^i ו- a^j לאותו מצב q.

נתבונן במילה a^ib^i. מילה זו שייכת לשפה ($n=\ell=0, i=m=p$) ולכן האוטומט מגיע מהמצב q למצב מקבל בקוראו את הסיפא b^i. לכן הוא מקבל את המילה a^ib^j שאינה בשפה ($\ell=0, i=m$) ולכן $m+\ell=i$ וגם אם j מתפרש כ- n וגם אם הוא מתפרש כ- p עדיין $n+p=j$ ו- $i\neq j$). לכן בהכרח האוטומט מגיע למצב שונה על כל מילה ב- W, כלומר יש לו אינסוף מצבים, בסתירה להיותו אוטומט סופי. לכן L אינה רגולרית.

<u>שאלה 8</u> (ריקה רם)

נתונה השפה L מעל הא"ב $\{a,b,c\}$. הוכיחו ש- L אינה רגולרית:

$$L=\{a^kb^n|k\geq 0,k<n<2k\}$$

<u>פתרון</u>

נניח ש- L רגולרית ולכן קיים אוטומט סופי A שמקבל אותה. נתבונן בקבוצה האינסופית $W=\{a^n|n>1\}$. נניח שקיימות בקבוצה שתי מילים a^i,a^j $i>j>1$, כך שהאוטומט מגיע על a^i ו- a^j לאותו מצב q. נתבונן במילה a^jb^{j+1} מילה זו שייכת לשפה כי $j<j+1<2j$ ולכן האוטומט מגיע מהמצב q למצב מקבל בקוראו את הסיפא b^{j+1}. אבל אז נובע שגם המילה a^ib^{j+1} מתקבלת והיא אינה בשפה: $i>j$ ולכן $i\geq j+1$ ולא מתקיים $i<j+1<2i$. מכאן שהאוטומט מגיע על כל מילה ב- W למצב שונה, כלומר יש לו אינסוף מצבים, בסתירה להיותו אוטומט סופי, לכן L אינה רגולרית.

<u>שאלה 9</u> (לאה יעקובוביץ)

נתונה השפה L מעל הא"ב $\{a,b\}$. האם L רגולרית? הוכח את תשובתך.

$$L=\{a^nb^m|n,m>=0,m\neq n\}$$

<u>פתרון</u>

זוהי הוכחה סטנדרטית למדי. נניח בשלילה ש- L רגולרית ולכן קיים אוטומט סופי A שמקבל אותה. נתבונן בקבוצת המילים האינסופית $W=\{a^n|n\geq 0\}$. נניח שקיימות בקבוצה זו שתי מלים a^i,a^j $i\neq j$, כך ש-A מגיע על שתיהן לאותו מצב q. נתבונן במילה a^ib^j. היא שייכת לשפה ולכן A מגיע למצב מקבל בקוראו את הסיפא b^j מהמצב q. אבל מכאן נובע שהאוטומט מקבל גם את המילה a^jb^j שאינה בשפה. לכן בהכרח האוטומט A מגיע למצב שונה על כל מילה ב- W ולכן יש לו אינסוף מצבים בסתירה להיותו אוטומט סופי. לכן בהכרח L אינה רגולרית.

<u>שאלה 10</u> (דורון זוהר)

נתבונן בשפת כל המילים מעל הא"ב $\{a,b,c\}$ המקיימות לפחות אחד משני התנאים הבאים:

א. אורך המילה זוגי וגדול מ- 0 ומספר מופעי האות a קטן מ- 100.

ב. ניתן לחלק את המילה לשני חלקים כך שבחלק הראשון מספר האותיות b גדול או שווה למספר האותיות c ובחלק השני מספר האותיות a גדול או שווה למספר האותיות c.

האם השפה רגולרית? הוכח את תשובתך.

<u>פתרון</u>

השפה אינה רגולרית. נניח בשלילה שהיא רגולרית ולכן קיים אוטומט סופי A שמקבל אותה. נתבונן בקבוצה האינסופית הבאה $W=\{a^n | n\geq 100\}$. נניח שקיימות בקבוצה זו שתי מילים a^i ו- a^j כך ש- $100\leq i<j$ והאוטומט מגיע על a^i ו- a^j לאותו מצב q. המילה a^ic^i בשפה כי היא מקיימת את תנאי ב: ניתן לחלק אותה כך $\varepsilon\cdot a^ic^i$. בחלק הראשון מספר האותיות b שווה למספר האותיות c (השווה ל-0) ובחלק השני מספר האותיות a שווה למספר האותיות c. לכן מהמצב q עם קריאת הסיפא c^i האוטומט מגיע למצב מקבל. אבל מכאן נובע שהוא מקבל גם את המילה a^ic^j. מילה זו אינה בשפה: היא אינה מקיימת את תנאי א' כי מספר האותיות a בה אינו קטן מ- 100 והיא גם אינה מקיימת את תנאי ב' כי בכל דרך שבה מחלקים את המילה תמיד בחלק השני מספר האותיות a קטן ממספר האותיות c. לכן בהכרח האוטומט מגיע על כל מילה ב- W למצב שונה ומכאן נובע כי יש לו אינסוף מצבים בסתירה להיותו אוטומט סופי. לכן, בהכרח השפה אינה רגולרית.

זו שאלה מעניינת בגלל התוספת של סעיף א' המחייבת הגדרה זהירה של הקבוצה W.

<u>שאלה 11</u> (דורון זוהר)

נתבונן בשפת כל המילים מעל הא"ב {0,1} המקיימות לפחות אחד משני התנאים הבאים:

א. המילה מסתיימת ברצף 10 ואורכה זוגי וגדול מ- 0.

ב. ניתן לחלק את המילה כך שבחלק הראשון מספר האותיות 0 גדול ממספר האותיות 1 ובחלק השני מספר האותיות 1 גדול או שווה למספר האותיות 0 ובין שני החלקים מפריד הרצף 0110.

האם השפה רגולרית? הוכח את תשובתך!

<u>פתרון</u>

בדומה לשאלה 10, גם כאן, בגלל התוספת של סעיף א', יש לוודא שהמילה שנוצרת אחרי הדבקת אחת הסיפות לרישא מ- W אינה בשפה (בגלל שהיא עומדת בתנאי סעיף א').

נניח בשלילה שהשפה רגולרית ולכן קיים אוטומט סופי A שמקבל אותה. נתבונן בקבוצה האינסופית $W=\{0^n01100^n | n>0\}$. נניח שקיימות בקבוצה זו שתי מילים 0^i01100^i ו- 0^j01100^j כך ש- $i>j>0$ והאוטומט מגיע על שתיהן לאותו מצב q. נתבונן במילה $0^i01100^i1^i$. היא בשפה כי ניתן לחלקה כך: $0^i\cdot 0110\cdot 0^i1^i$ ואז בחלק הראשון מספר האותיות 0 הוא $0<i$ וזה גדול ממספר האותיות 1 השווה ל- 0, ובחלק השני מספר האותיות 1 שווה למספר האותיות 0 ובין שני החלקים מפריד הרצף 0110. לכן מהמצב q האוטומט מגיע למצב מקבל עם קריאת הסיפא 1^i, ולכן נובע כי האוטומט מקבל גם את המילה $0^i01100^j1^i$ $i>j>0$. מילה זו אינה בשפה – היא אינה מקיימת את סעיף א' כי אינה מסתיימת ב- 10. היא גם אינה מקיימת את סעיף ב' כי יש רק חלוקה אפשרית אחת לשני חלקים שביניהם מפריד הרצף 0110: $0^i\cdot 0110\cdot 0^j1^i$ ואז בחלק השני מספר האותיות 1 קטן ממספר האותיות 0. לכן, בהכרח האוטומט מגיע

למצב שונה על כל מילה ב- W ומאחר ש- W אינסופית, נקבל מכאן כי לאוטומט אינסוף מצבים, בסתירה להיותו אוטומט סופי. לכן בהכרח השפה אינה רגולרית.

<u>שאלה 12</u> (דורון זוהר)

נתבונן בשפת כל המילים מעל הא"ב $\{a,b,c\}$ אשר מספר האותיות a בהן כפול ממספר האותיות b והן מכילות את הרצף bc.

האם השפה רגולרית? הוכח את תשובתך!

<u>פתרון</u>

נניח שהשפה רגולרית ולכן קיים אוטומט סופי A שמקבל אותה. נתבונן בקבוצת המילים האינסופית הבאה: $W=\{b^nc|n>0\}$. נניח שקיימות בקבוצה זו שתי מילים b^ic ו- b^jc כך ש- $i\neq j$ שהאוטומט מגיע עליהן לאותו מצב q. נתבונן במילה b^ica^{2i}. מילה זו שייכת לשפה כי היא מכילה את הרצף bc ומספר האותיות a בה כפול ממספר האותיות b. לכן האוטומט מגיע מהמצב q למצב מקבל בקוראו את הסיפא a^{2i}. אבל, מכאן נובע שהוא מקבל גם את המילה b^jca^{2j}, שאינה שייכת לשפה כי מספר האותיות a בה אינו כפול ממספר האותיות b שבה. לכן בהכרח האוטומט מגיע למצב שונה על כל מילה ב- W ומאחר ש- W אינסופית, נובע מכך שיש לו אינסוף מצבים, בסתירה להיותו אוטומט סופי. לכן בהכרח השפה אינה רגולרית.

<u>שאלה 13</u> (אתי מנשה)

האם השפה $L=\{a^ib^jcd^k|i\geq0,k>j\geq0\}$ היא רגולרית? הוכח את תשובתך!

<u>פתרון</u>

השפה אינה רגולרית. נניח בשלילה כי היא רגולרית וכי קיים אוטומט סופי A שמקבל אותה. נסתכל על קבוצת המילים $W=\{b^n|n\geq0\}$. נניח בשלילה שקיימות בקבוצה זו שתי מילים b^i ו- b^j $i<j$ שעליהן האוטומט מגיע לאותו מצב q. נסתכל על המילה b^icd^j. מילה זו שייכת לשפה (מספר האותיות a שווה ל-0, מספר האותיות d גדול ממש ממספר האותיות b), לכן האוטומט מגיע למצב מקבל בקוראו את הסיפא cd^j מהמצב q. אבל מכאן נובע שהוא מקבל גם את המילה b^jcd^j שאינה שייכת לשפה, כי מספר האותיות d בה אינו גדול ממספר האותיות b שבה. לכן בהכרח האוטומט A מגיע למצב שונה עבור כל מילה ב-W ומאחר ש-W אינסופית, נובע של-A אינסוף מצבים, בסתירה להיותו אוטומט סופי. לכן L אינה רגולרית.

<u>שאלה 14</u> (אתי מנשה)

תהי L_2 שפה מעל הא"ב $\{a,b\}$ אשר ידוע כי אינה רגולרית. נסמן ב- Σ^* את שפת כל המילים מעל הא"ב $\{a,b\}$. הוכח שהשפה $L=R(\Sigma^*-L_2)$ אינה רגולרית.

<u>פתרון</u>

נניח בשלילה ש- L רגולרית. מסגירות משפחת השפות הרגולריות לפעולת ההיפוך נובע שגם R(L) רגולרית. אבל $R(L)=R(R(\Sigma^*-L_2)= \Sigma^*-L_2$. כעת, Σ^*-L_2 היא שפת כל המילים שאינן ב- L_2, כלומר $\overline{L_2}$. ובמילים אחרות $\overline{(\Sigma^*-L_2)} = L_2$. לכן מסגירות משפחת השפות הרגולריות לפעולת המשלים גם L_2 רגולרית, בסתירה לנתון. לכן L אינה רגולרית.

<u>שאלה 15</u> (דגנית מורן)

תהי L השפה הבאה מעל הא"ב {a,b,c}:

$$L=\{a^n b^m c^k \mid k=n-m,\ n>m\geq 0\}$$

האם L רגולרית? הוכח את תשובתך!

<u>פתרון</u>

L אינה רגולרית. נניח בשלילה שהיא רגולרית ולכן קיים אוטומט סופי A שמקבל אותה. נתבונן בקבוצת המילים האינסופית $W=\{a^n \mid n>0\}$. נניח שקיימות בקבוצה זו שתי מילים, a^i, a^j, $i\neq j$, כך שהאוטומט מגיע על שתיהן לאותו מצב q. נתבונן במילה $a^i c^i$. מילה זו שייכת לשפה $(k=n,\ m=0,\ n=i>0)$ ולכן האוטומט מגיע למצב מקבל בקוראו את הסיפא c^i מהמצב q. לכן האוטומט מקבל גם את המילה $a^j c^i$ אך זו אינה שייכת לשפה. לכן בהכרח האוטומט A מגיע למצב שונה על כל מילה ב- W, ומאחר ש-W אינסופית, נובע שיש לו אינסוף מצבים, בסתירה להיותו אוטומט סופי. לכן L אינה רגולרית.

<u>שאלה 16</u> (דגנית מורן)

תהי L השפה הבאה מעל הא"ב {a,b,c}:

$$L=\{c^k a b^n a^n b \mid k,n\geq 0\}$$

האם L רגולרית? הוכח את תשובתך!

<u>פתרון</u>

L אינה רגולרית. נניח בשלילה שהיא רגולרית ולכן קיים אוטומט סופי A שמקבל אותה. נתבונן בקבוצת המילים האינסופית $W=\{ab^n \mid n\geq 0\}$ ונניח שקיימות בקבוצה זו שתי מילים ab^i,ab^j, $i\neq j$, כך שהאוטומט מגיע על שתיהן לאותו מצב q. נתבונן במילה $ab^i a^i b$. מילה זו שייכת לשפה $(k=0,n=i)$ ולכן האוטומט מגיע למצב מקבל בקוראו את הסיפא $a^i b$ מהמצב q. לכן האוטומט מקבל גם את המילה $ab^j a^i b$ שאינה בשפה. לכן בהכרח A מגיע למצב שונה על כל מילה ב- W ומאחר ש- W אינסופית, נובע שיש לו אינסוף מצבים, בסתירה להיותו אוטומט סופי. לכן L אינה רגולרית.