

החומרים שלפניכם הוכנו על-ידי מורים מובילים שהשתתפו בקורס תשס"ג, בהנחיית ד"ר מיכל ארמוני מהאוניברסיטה הפתוחה. ניתן להשתמש בחומרים לצורך הוראה אבל אסור לעשות בהם כל שימוש מסחרי ללא קבלת אישור מראש מהמחברים.

בניית אוטומט מחסנית

שאלה 1 (איריס ברגורי)

בנה אוטומט מחסנית המקבל את השפה L מעל הא"ב $\{a,b,c,d\}$:

$$L = \{a^i b^{i+k-j} c^j d^k \mid i,j,k > 0, k > j\}$$

פתרון

האוטומט יעבוד על פי האלגוריתם הבא: הוא ידחוף אותיות A למחסנית עם קריאת אותיות a . עם קריאת אותיות b יתחיל לשלוף ממנה אותיות. אחרי שהמחסנית מתרוקנת יחזור וידחוף אליה אותיות A עם קריאת שאריות האותיות b ואחר כך עם קריאת אותיות c . עם קריאת אותיות d יתחיל לשלוף אותיות מהמחסנית ויעבור למצב מקבל עם התרוקנותה (ולכן, שלב הדחיפה השני דורש סימון תחתית המחסנית). לאוטומט שישה מצבים:

q_0 – המצב ההתחלתי שבו נקראות אותיות a מהקלט ונדחפות אותיות A למחסנית.

q_1 – מצב שליפה, אליו עובר האוטומט עם קריאת אותיות b ונשאר בו כל עוד המחסנית לא התרוקנה.

q_2 – מצב מילוי, אליו עובר האוטומט אחרי שהתרוקנה המחסנית בעקבות קריאת אותיות b ובו הוא נשאר כל עוד נקראות אותיות b .

q_3 – מצב מילוי, אליו עובר האוטומט עם קריאת אותיות c .

q_4 – מצב שליפה, אליו עובר האוטומט עם קריאת אותיות d .

q_5 – מצב מקבל.

המעברים:

- | | |
|---------------------------------|--|
| (q_0, a, \perp, q_0, A) | קריאת a ראשונה – |
| (q_0, a, A, q_0, AA) | קריאת a שניה ויותר – |
| $(q_0, b, A, q_1, \varepsilon)$ | קריאת b ראשונה – |
| $(q_1, b, A, q_1, \varepsilon)$ | קריאת b שניה ויותר לפני התרוקנות המחסנית – |
| (q_1, b, \perp, q_2, S) | קריאת b ראשונה אחרי התרוקנות המחסנית – |
| (q_2, b, S, q_2, SA) | קריאת b שניה אחרי התרוקנות המחסנית – |
| (q_2, b, A, q_2, AA) | קריאת b שלישית ויותר אחרי התרוקנות המחסנית – |
| (q_2, c, A, q_3, AA) | קריאת c ראשונה – |

- (q_3, c, A, q_3, AA) – קריאת c שניה ויותר לפני התרוקנות המחסנית –
 - $(q_3, d, A, q_4, \varepsilon)$ – קריאת d ראשונה –
 - $(q_4, d, A, q_4, \varepsilon)$ – קריאת d שניה ויותר –
 - $(q_4, d, S, q_5, \varepsilon)$ – קריאת d המובילה להתרוקנות המחסנית –
- א"ב המחסנית הוא כמובן $\{S, A\}$

שאלה 2 (ויקטוריה צורי)

בנה אוטומט מחסנית המקבל את השפה הבאה מעל הא"ב $\{a, b, c\}$:
 $L = \{a^n b^m c^k \mid n, m, k > 0, k \geq n+m\}$

פתרון

שאלה זו מתאימה לעבודת כיתה או לשיעורי בית, אחרי שהתלמידים דנו בשאלה 5.13 בספר לתלמיד.
 לאוטומט ארבעה מצבים, q_3 מצב מקבל:
 q_0 – מצב התחלתי. זוכר שעד כה נקראו רק אותיות a .
 q_1 – זוכר שעד כה נקרא רצף לא ריק של אותיות a ואחריו רצף לא ריק של אותיות b .
 q_2 – זוכר שעד כה נקרא רצף לא ריק של אותיות a ואחריו רצף לא ריק של אותיות b ואחריו רצף לא ריק של אותיות c , כאשר מספר האותיות c שנקראו עד כה קטן מסכום מספר האותיות a ומספר האותיות b שנקראו.
 q_3 – זוכר שעד כה נקרא רצף לא ריק של אותיות a , ואחריו רצף לא ריק של אותיות b ואחריו רצף לא ריק של אותיות c , כאשר מספר האותיות c שנקראו עד כה אינו קטן מסכום מספר האותיות a ומספר האותיות b שנקראו.
 א"ב המחסנית של האוטומט הוא $\{S, A\}$.
 המעברים:

- (q_0, a, \perp, q_0, S) – קריאת a ראשונה –
- (q_0, a, S, q_0, SA) – קריאת a שניה –
- (q_0, a, A, q_0, AA) – קריאת a שלישית ויותר –
- (q_0, b, S, q_1, SA) – קריאת b ראשונה כאשר נקראה קודם אות a אחת –
- (q_0, b, A, q_1, AA) – קריאת b ראשונה כאשר נקראו יותר מאות a אחת –
- (q_1, b, A, q_1, AA) – קריאת b שניה ויותר –
- $(q_1, c, A, q_2, \varepsilon)$ – קריאת c ראשונה –
- $(q_2, c, A, q_2, \varepsilon)$ – קריאת c שניה ויותר שאינה מביאה להתרוקנות המחסנית –
- $(q_2, c, S, q_3, \varepsilon)$ – קריאת c שניה ויותר המביאה להתרוקנות המחסנית –
- $(q_3, c, \perp, q_3, \varepsilon)$ – קריאת c שלישית ויותר מעבר להתרוקנות המחסנית –

שאלה 3 (ריקה רם)

בנה אוטומט מחסנית עבור השפה הבאה מעל הא"ב $\{a,b,c\}$:

$$L = \{a^n(cw)^k cb^{n+1} \mid n, k > 0, w \in \{a^m b^m \mid m > 0\}\}$$

פתרון

האוטומט יעבוד עפ"י האלגוריתם הבא:

עם קריאת האות a הראשונה ידחוף למחסנית אות לסימון תחתית ועוד אות A . אח"כ ידחוף למחסנית אות A על כל אות a שנקראת.

בהגיע אות c יעבור למצב חדש ואז עם קריאת אותיות a ידחוף שוב אותיות A למחסנית תוך סימון תחתית חדשה וירוקן את האותיות עם קריאת אותיות b וחוזר חלילה עד שאחרי האות c מופיעה האות b . במקרה זה ירוקן את המחסנית עם קריאת אותיות b עד להתרוקנותה המלאה.

לאוטומט שמונה מצבים:

q_0 – מצב התחלתי בו נקרא רצף האותיות a הראשון.

q_1 – מצב אחרי קריאת c ראשון.

q_2 – קריאת רצף a פנימי.

q_3 – קריאת רצף b פנימי.

q_4 – מצב שוויון של רצף a פנימי ורצף b פנימי.

q_5 – מצב אחרי קריאת c שני ויותר.

q_6 – קריאת רצף b חיצוני.

q_7 – שוויון באורך הרצפים החיצוניים.

א"ב המחסנית הוא $\{S,A,T\}$ המצב המקבל הוא q_7 .

קבוצת המעברים:

(q_0, a, \perp, q_0, SA) – קריאת a ראשונה ברצף הפותח –

(q_0, a, A, q_0, AA) – קריאת a שניה ויותר ברצף הפותח –

(q_0, c, A, q_1, A) – נקראה c –

(q_1, a, A, q_2, T) – קריאת a ראשונה ברצף פנימי –

(q_2, a, T, q_2, TA) – קריאת a שניה ברצף פנימי –

(q_2, a, A, q_2, AA) – קריאת a שלישית ויותר ברצף פנימי –

$(q_2, b, A, q_3, \epsilon)$ – קריאת b ראשונה ברצף פנימי, כשהתחתית השניה אינה גלויה –

$(q_2, b, T, q_4, \epsilon)$ – קריאת b ראשונה ברצף פנימי, כשהתחתית השניה גלויה –

$(q_3, b, A, q_3, \epsilon)$ – קריאת b שניה ויותר ברצף פנימי, כשהתחתית השניה אינה גלויה –

$(q_3, b, T, q_4, \epsilon)$ – קריאת b שניה ויותר ברצף פנימי, כשהתחתית השניה גלויה –

$(q_4, c, A, q_5, \epsilon)$ – נקראה c אחרי רצף פנימי אחד –

(q_5, a, A, q_2, T) – נקראה a המתחילה רצף פנימי נוסף –

- $(q_5, b, A, q_6, \varepsilon)$ – נקראה b המתחילה רצף חיצוני –
- $(q_6, b, A, q_6, \varepsilon)$ – נקראה b שניה ויותר ברצף חיצוני –
- $(q_6, b, S, q_7, \varepsilon)$ – נקראה b ברצף חיצוני המביאה לריקון המחסנית –

שאלה 4 (אסנת אנגלמן, אסתי מאסטרסי, אורנה שטיין)

בנה אוטומט מחסנית המקבל את כל המילים מעל הא"ב $\{0,1\}$ בהן מספר האותיות 0 שווה למספר האותיות 1 והן מייצגות מספר בינארי זוגי.

פתרון

האוטומט דומה מאוד לאוטומט שנתון במדריך למורה כפתרון לתרגיל 5.19 מהספר לתלמיד. כמובן, יש להחליף כל a ב- 0 וכל b ב- 1 . בשפה הנדונה המילה הריקה אינה מספר בינארי ולכן בפרט אינה מספר בינארי זוגי, כלומר היא אינה בשפה. לכן יש להוסיף מצב התחלתי חדש q_0 שאינו מצב מקבל. את שני המצבים הזוכרים שוויון ואי שוויון של מספר האותיות 0 (a באוטומט המקורי) ומספר האותיות 1 (b באוטומט המקורי) יש להכפיל באופן הבא:

q_1 – מצב הזוכר שוויון במספר האותיות 0 ומספר האותיות 1 שנקראו עד כה, וזוכר כי האות האחרונה שנקראה היא 0.

q_2 – מצב הזוכר אי-שוויון במספר האותיות 0 ומספר האותיות 1 שנקראו עד כה, וזוכר כי האות האחרונה שנקראה היא 0.

q_3 – מצב הזוכר שוויון במספר האותיות 0 ומספר האותיות 1 שנקראו עד כה, וזוכר כי האות האחרונה שנקראה היא 1.

q_4 – מצב הזוכר אי-שוויון במספר האותיות 0 ומספר האותיות 1 שנקראו עד כה, וזוכר כי האות האחרונה שנקראה היא 1.

א"ב הקלט הוא $\{0,1\}$. א"ב המחסנית $\{S,T,A,B\}$, q_1 הוא המצב המקבל.

המעברים:

- $(q_0, 0, \perp, q_2, S)$ – קריאת אות 0 ראשונה –
- $(q_0, 1, \perp, q_4, T)$ – קריאת אות 1 ראשונה –
- $(q_2, 0, S, q_2, SA)$ – קריאת אות 0 כאשר יש עודף אות 0 אחת, והאות האחרונה שנקראה היא 0 –
- $(q_2, 0, A, q_2, AA)$ – קריאת אות 0 כאשר יש עודף אותיות 0, והאות האחרונה שנקראה היא 0 –
- $(q_2, 0, T, q_1, \varepsilon)$ – קריאת אות 0 כאשר יש עודף של אות 1 אחת, והאות האחרונה שנקראה היא 0 –
- $(q_2, 0, B, q_2, \varepsilon)$ – קריאת אות 0 כאשר יש עודף אותיות 1, והאות האחרונה שנקראה היא 0 –
- $(q_2, 1, S, q_3, \varepsilon)$ – קריאת אות 1 כאשר יש עודף של אות 0 אחת, והאות האחרונה שנקראה היא 0 –
- $(q_2, 1, A, q_4, \varepsilon)$ – קריאת אות 1 כאשר יש עודף אותיות 0, והאות האחרונה שנקראה היא 0 –
- $(q_2, 1, T, q_4, TB)$ – קריאת אות 1 כאשר יש עודף אות 1 אחת, והאות האחרונה שנקראה היא 0 –

$(q_2, 1, B, q_4, BB)$	קריאת אות 1 כאשר יש עודף אותיות 1, והאות האחרונה שנקראה היא 0 –
$(q_1, 0, \perp, q_2, S)$	קריאת אות 0 כאשר יש שוויון במספר האותיות 0 ומספר האותיות 1 שנקראו עד כה, והאות האחרונה שנקראה היא 0 –
$(q_1, 1, \perp, q_4, T)$	קריאת אות 1 כאשר יש שוויון במספר האותיות 0 ומספר האותיות 1 שנקראו עד כה, והאות האחרונה שנקראה היא 0 –
$(q_3, 0, \perp, q_2, S)$	קריאת אות 0 כאשר יש שוויון במספר האותיות 0 ומספר האותיות 1 שנקראו עד כה, והאות האחרונה שנקראה היא 1 –
$(q_3, 1, \perp, q_4, T)$	קריאת אות 1 כאשר יש שוויון במספר האותיות 0 ומספר האותיות 1 שנקראו עד כה, והאות האחרונה שנקראה היא 1 –
$(q_4, 0, S, q_2, SA)$	קריאת אות 0 כאשר יש עודף אות 0 אחת, והאות האחרונה שנקראה היא 1 –
$(q_4, 0, A, q_2, AA)$	קריאת אות 0 כאשר יש עודף אותיות 0, והאות האחרונה שנקראה היא 1 –
$(q_4, 0, T, q_1, \varepsilon)$	קריאת אות 0 כאשר יש עודף של אות 1 אחת, והאות האחרונה שנקראה היא 1 –
$(q_4, 0, B, q_2, \varepsilon)$	קריאת אות 0 כאשר יש עודף של אותיות 1, והאות האחרונה שנקראה היא 1 –
$(q_4, 1, S, q_3, \varepsilon)$	קריאת אות 1 כאשר יש עודף של אות 0 אחת, והאות האחרונה שנקראה היא 1 –
$(q_4, 1, A, q_4, \varepsilon)$	קריאת אות 1 כאשר יש עודף של אותיות 0, והאות האחרונה שנקראה היא 1 –
$(q_4, 1, T, q_4, TB)$	קריאת אות 1 כאשר יש עודף של אות 1 אחת, והאות האחרונה שנקראה היא 1 –
$(q_4, 1, B, q_4, BB)$	קריאת אות 1 כאשר יש עודף של אותיות 1, והאות האחרונה שנקראה היא 1 –

הערה: מאחר ובמקרה הכללי השפות חופשיות ההקשר אינן סגורות לחיתוך, לא יכולנו להסתמך על תכונת סגירות ולהסיק מכאן כי השפה הנדונה חופשית הקשר. אבל, שפה זו היא למעשה חיתוך של שפה חופשית הקשר (מספר האותיות 0 במילה שווה למספר האותיות 1 במילה) עם שפה רגולרית (המילה מייצגת מספר בינארי זוגי). חיתוך של שפה חופשית הקשר עם שפה רגולרית אכן נותן תמיד שפה חופשית הקשר (כלומר, השפות חופשיות ההקשר סגורות לפעולת החיתוך עם שפה רגולרית) אך זה משפט שאינו כלול בחומר הלימוד של היחידה ולכן לא ניתן להסתמך עליו. בהוכחת המשפט אכן נבנה אוטומט מכפלה (כמו ההוכחה עבור שפות רגולריות) ולמעשה, הבנייה הכללית המשמשת בהוכחת המשפט דומה מאוד לבנייה שבוצעה כאן.

שאלה 5 (אסנת אנגלמן, אסתי מאסטראסי, אורנה שטיין)

בבית חרושת מייצרים מחרוזות המורכבות מפנינים גדולות וקטנות, ובכל מחרוזת מספר הפנינים הקטנות שווה למספר הפנינים הגדולות. המחרוזת צריכה להתחיל ברצף של פנינים קטנות ולהסתיים ברצף של פנינים קטנות ובמרכזה רצף של פנינים גדולות. מחרוזת שאינה עומדת בתנאים אלו אינה עוברת את בדיקת האיכות.

א. הגדר שפה שמתאימה לכל המחרוזות העומדות בבדיקת האיכות.

ב. בנה אוטומט מחסנית הקובע אם מחרוזת נתונה עוברת את בדיקת האיכות.

פתרון

א. השפה היא $\{a^n b^{n+m} a^m \mid n, m > 0\}$ מעל הא"ב $\{a, b\}$.

ב. האוטומט מזכיר מעט את האוטומט שנבנה כפתרון לשאלה 1, אלא שהאוטומט הנדרש כעת פשוט יותר. הוא יעבור לפי האלגוריתם הבא: ידחוף למחסנית את A על כל אות a שנקראת מהקלט. עם קריאת אותיות b יתחיל לשלוף אותיות מהמחסנית עד התרוקנותה. כאשר היא התרוקנה ידחוף שוב למחסנית את A – הפעם על כל אות b נוספת שנקראת מהקלט (והפעם יש לסמן את תחתית המחסנית). עם קריאת אותיות a נוספות יתחיל לשלוף אותיות מהמחסנית ויעבור למצב מקבל עם התרוקנות המחסנית.

לאוטומט חמישה מצבים:

q_0 – מצב התחלתי, לקריאת אותיות a.

q_1 – מצב לקריאת אותיות b עד התרוקנות המחסנית.

q_2 – מצב לקריאת אותיות b ומילוי המחסנית.

q_3 – מצב לקריאת אותיות a וריקון המחסנית.

q_4 – מצב מקבל.

א"ב הקלט הוא $\{a, b\}$ וא"ב המחסנית $\{S, A\}$.

המעברים:

(q_0, a, \perp, q_0, A)	קריאת אות a ראשונה –
(q_0, a, A, q_0, AA)	קריאת אות a שניה ויותר –
$(q_0, b, A, q_1, \varepsilon)$	קריאת אות b ראשונה –
$(q_1, b, A, q_1, \varepsilon)$	קריאת אות b שניה ויותר, לפני התרוקנות המחסנית –
(q_1, b, \perp, q_2, S)	קריאת אות b, ראשונה אחרי התרוקנות המחסנית –
(q_2, b, S, q_2, SA)	קריאת אות b, שניה אחרי התרוקנות המחסנית –
(q_2, b, A, q_2, AA)	קריאת אות b, שלישית ויותר אחרי התרוקנות המחסנית –
$(q_2, a, A, q_3, \varepsilon)$	קריאת אות a ראשונה ברצף השני, כשבמחסנית יותר מאות אחת –
$(q_2, a, S, q_4, \varepsilon)$	קריאת אות a ראשונה ברצף השני, כשבמחסנית אות אחת –
$(q_3, a, A, q_3, \varepsilon)$	קריאת אות a שניה ויותר ברצף השני, לפני התרוקנות המחסנית –
$(q_3, a, S, q_4, \varepsilon)$	קריאת אות a שניה ויותר ברצף השני, המביאה להתרוקנות המחסנית –

שאלה 6 (לאה יעקובוביץ)

בנה אוטומט מחסנית המקבל את השפה הבאה מעל הא"ב $\{a, b, c, d\}$:

$$L = \{a^n b^{n+m+k} c^m d^k \mid n, m, k \geq 0, n+m+k\}$$

פתרון

האוטומט יעבוד עפ"י האלגוריתם הבא: בקריאת אותיות a ידחוף אותיות A למחסנית. עם קריאת אותיות b ישלוף ממנה אותיות עד להתרוקנותה, תוך שהוא זוכר את זוגיות מספר האותיות b שנקראו. אחרי שהמחסנית מתרוקנת ידחוף למחסנית אותיות A כל עוד נקראות אותיות b , תוך שהוא זוכר את זוגיות מספר האותיות b שנקראו. כשנקראות אותיות c יתחיל לשלוף מהמחסנית – אם נקראו מספר זוגי של אותיות b – וימשיך בכך עם קריאת אותיות d . אם נקראו מספר זוגי של אותיות b והמחסנית מתרוקנת בקריאת אותיות d יעבור למצב מקבל. בכל שלב מילוי מחסנית תסומן תחתית המחסנית.

א"ב המחסנית יהיה $\{S,A\}$. א"ב הקלט $\{a,b,c,d\}$.

לאוטומט עשרה מצבים:

q_0 – מצב התחלתי ומצב מקבל (לקבלת המילה הריקה).

q_1 – קריאת אותיות a .

q_2 – קריאת אותיות b במספר זוגי וקטן ממספר האותיות a .

q_3 – קריאת אותיות b במספר אי זוגי וקטן ממספר האותיות a או שווה לו.

q_4 – קריאת אותיות b במספר זוגי ושווה למספר האותיות a . זהו מצב מקבל (לקבלת מילה בה

$$(m=k=0, n>0)$$

q_5 – קריאת אותיות b במספר זוגי וגדול ממספר האותיות a .

q_6 – קריאת אותיות b במספר אי זוגי וגדול ממספר האותיות a .

q_7 – קריאת אותיות c .

q_8 – קריאת אותיות d .

q_9 – מצב מקבל, המזהה מילה מהצורה $a^n b^{n+m+k} c^m d^k$ כאשר m או k גדולים מ-0.

המעברים:

(q_0, a, \perp, q_1, S)	קריאת a ראשונה –
(q_1, a, S, q_1, SA)	קריאת a שניה –
(q_1, a, A, q_1, AA)	קריאת a שלישית ויותר –
(q_0, b, \perp, q_6, S)	קריאת b ראשונה, כשלא נקראו לפניו אותיות a –
$(q_1, b, S, q_3, \varepsilon)$	קריאת b ראשונה, כאשר לפניו נקראה אות a אחת –
$(q_1, b, A, q_3, \varepsilon)$	קריאת b ראשונה, כאשר לפניו נקראה יותר מאות a אחת –
$(q_3, b, A, q_2, \varepsilon)$	קריאת b זוגית, שניה ויותר, לפני התרוקנות המחסנית –
$(q_3, b, S, q_4, \varepsilon)$	קריאת b זוגית, שניה ויותר, המביאה לריקון המחסנית –
(q_3, b, \perp, q_5, S)	קריאת b זוגית, הראשונה אחרי התרוקנות המחסנית –
$(q_2, b, A, q_3, \varepsilon)$	קריאת b אי זוגית, שלישית ויותר, לפני התרוקנות המחסנית –
$(q_2, b, S, q_3, \varepsilon)$	קריאת b אי זוגית, שלישית ויותר, המביאה לריקון המחסנית –
(q_4, b, \perp, q_6, S)	קריאת b אי זוגית, הראשונה אחרי התרוקנות המחסנית –

(q_5, b, S, q_6, SA)	קריאת b אי זוגית, השניה אחרי התרוקנות המחסנית –
(q_6, b, S, q_5, SA)	קריאת b זוגית, השניה אחרי התרוקנות המחסנית –
(q_5, b, A, q_6, AA)	קריאת b אי זוגית, שהיא שלישית ויותר אחרי התרוקנות המחסנית –
(q_6, b, A, q_5, AA)	קריאת b זוגית, שהיא שלישית ויותר אחרי התרוקנות המחסנית –
$(q_5, c, A, q_7, \epsilon)$	קריאת c ראשונה אחרי שנקרא מספר זוגי של אותיות b , והיא אינה מביאה להתרוקנות המחסנית –
$(q_5, c, S, q_9, \epsilon)$	קריאת c ראשונה אחרי שנקרא מספר זוגי של אותיות b , והיא מביאה להתרוקנות המחסנית –
$(q_7, c, A, q_7, \epsilon)$	קריאת c שניה ויותר אחרי שנקרא מספר זוגי של אותיות b , והיא אינה מביאה להתרוקנות המחסנית –
$(q_7, c, S, q_9, \epsilon)$	קריאת c שניה ויותר אחרי שנקרא מספר זוגי של אותיות b , והיא מביאה להתרוקנות המחסנית –
$(q_5, d, A, q_8, \epsilon)$	קריאת d ראשונה אחרי שנקרא מספר זוגי של אותיות b , ולא נקראו אותיות c , והיא אינה מביאה להתרוקנות המחסנית –
$(q_5, d, S, q_9, \epsilon)$	קריאת d ראשונה אחרי שנקרא מספר זוגי של אותיות b , ולא נקראו אותיות c , והיא מביאה להתרוקנות המחסנית –
$(q_7, d, A, q_8, \epsilon)$	קריאת d ראשונה אחרי שנקראו אותיות c , ולפניהן נקרא מספר זוגי של אותיות b , והיא אינה מביאה להתרוקנות המחסנית –
$(q_7, d, S, q_9, \epsilon)$	קריאת d ראשונה אחרי שנקראו אותיות c ולפניהן נקרא מספר זוגי של אותיות b , והיא מביאה להתרוקנות המחסנית –
$(q_8, d, A, q_8, \epsilon)$	קריאת d שניה ויותר אחרי שנקרא מספר זוגי של אותיות b , והיא אינה מביאה להתרוקנות המחסנית –
$(q_8, d, S, q_9, \epsilon)$	קריאת d שניה ויותר אחרי שנקרא מספר זוגי של אותיות b , והיא מביאה להתרוקנות המחסנית –

כדאי לשים לב לקווי הדמיון בין אוטומט זה לאוטומט שנבנה עבור שאלה 1, ולהבדלים ביניהם.

שאלה 7 (לאה יעקובוביץ)

בנה אוטומט מחסנית המקבל את השפה הבאה מעל הא"ב $\{a, b, c\}$:

$$L = \{a^{2n}b^m c^n \mid n, m \geq 0, m \text{ אי-זוגי}, n \text{ זוגי}\}$$

פתרון

האוטומט יעבוד עפ"י האלגוריתם הבא: הוא ידחוף למחסנית את A עם קריאת כל אות a שניה. עם קריאת אותיות b לא יגע במחסנית ורק יעקוב אחר זוגיות מספר האותיות b, עם קריאת אותיות c ישלוף אותיות מהמחסנית תוך מעקב אחר זוגיות מספר האותיות c.

א"ב המחסנית הוא $\{S,T\}$. א"ב הקלט $\{a,b\}$. לאוטומט תשעה מצבים:

q_0 – מצב התחלתי, נקראו אותיות a במספר זוגי.

q_1 – נקראו אותיות a במספר אי זוגי.

q_2 – נקראו אותיות b במספר אי זוגי ולפניהן נקראו אותיות a.

q_3 – נקראו אותיות b במספר זוגי ולפניהן נקראו אותיות a.

q_4 – נקראו אותיות b במספר אי זוגי ולפניהן לא נקראו אותיות a.

q_5 – נקראו אותיות b במספר זוגי ולפניהן לא נקראו אותיות a.

q_6 – נקראו אותיות c במספר אי זוגי וקטן ממחצית מספר האותיות a שלפניהן.

q_7 – נקראו אותיות c במספר זוגי וקטן ממחצית מספר האותיות a שלפניהן.

q_8 – נקראו אותיות c במספר זוגי ושווה למחצית מספר האותיות a שלפניהן.

מצבים מקבלים: q_4 ו- q_8 .

המעברים:

$(q_0, a, \perp, q_1, \varepsilon)$	קריאת a ראשונה –
(q_1, a, \perp, q_0, S)	קריאת a שניה –
$(q_0, a, S, q_1, \varepsilon)$	קריאת a שלישית –
(q_1, a, S, q_0, SA)	קריאת a רביעית –
(q_0, a, A, q_1, AA)	קריאת a אי זוגית, חמישית ויותר –
(q_1, a, A, q_0, AA)	קריאת a זוגית, שישית ויותר –
$(q_0, b, \perp, q_4, \varepsilon)$	קריאת b ראשונה, כשלפניה לא נקראו אותיות a –
(q_0, b, S, q_2, S)	קריאת b ראשונה, כשלפניה נקראו שתי אותיות a –
(q_0, b, A, q_2, A)	קריאת b ראשונה, כשלפניה מספר זוגי וגדול מ-2 של אותיות a –
$(q_4, b, \perp, q_5, \varepsilon)$	קריאת b זוגית, שניה ויותר, כשלפניה לא נקראו אותיות a –
$(q_5, b, \perp, q_4, \varepsilon)$	קריאת b אי זוגית, שלישית ויותר, כשלפניה לא נקראו אותיות a –
(q_2, b, S, q_3, S)	קריאת b זוגית, שניה ויותר, כשלפניה נקראו שתי אותיות a –
(q_2, b, A, q_3, A)	קריאת b זוגית, שניה ויותר, כשלפניה מספר זוגי וגדול מ-2 של אותיות a –
(q_3, b, S, q_2, S)	קריאת b אי זוגית, שלישית ויותר, כשלפניה נקראו שתי אותיות a –
(q_3, b, A, q_2, A)	קריאת b אי זוגית, שלישית ויותר, כשלפניה מספר זוגי וגדול מ-2 של אותיות a –
$(q_2, c, A, q_6, \varepsilon)$	קריאת c ראשונה, כשלפניה מספר זוגי וגדול מ-2 של אותיות a, ומספר אי

זוגי של אותיות b –

$(q_6, c, A, q_7, \varepsilon)$ קריאת c זוגית, שניה ויותר, כשלפניה מספר אי זוגי של אותיות b , והיא אינה מביאה להתרוקנות המחסנית –

$(q_6, c, S, q_8, \varepsilon)$ קריאת c זוגית, שניה ויותר, כשלפניה מספר אי זוגי של אותיות b , והיא מביאה להתרוקנות המחסנית –

$(q_7, c, A, q_6, \varepsilon)$ קריאת c אי זוגית, שלישית ויותר, כשלפניה מספר אי זוגי של אותיות b , והיא אינה מביאה להתרוקנות המחסנית –

שימו לב כי אין מעברים המתאימים לאות c במצבים q_2 ו- q_7 כאשר בראש המחסנית נמצאת S . בכך אין אנו מאפשרים לקבל מילים בהן מספר האותיות c אי זוגי.

שאלה 8 (דורון זוהר)

בנה אוטומט מחסנית עבור השפה הבאה מעל הא"ב $\{x, y, z\}$:

$$L = \{ (yx)^n z^k (xy)^j \mid n \geq 0, n < j, k \geq 0, k \bmod 2 = 0 \}$$

פתרון

האוטומט יעבוד עפ"י האלגוריתם הבא:

בשלב הראשון הוא יקרא כל פעם מהקלט רצף yx ועבור כל רצף יכניס למחסנית אות אחת. עם קריאת אותיות z יעקוב אחרי זוגיות מספר האותיות z , בלי לגעת במחסנית (בדומה לאוטומט משאלה 7) ועם קריאת רצפים xy יוציא אות מהמחסנית עבור כל רצף xy שנקרא. הוא יעבור למצב מקבל אחרי התרוקנות המחסנית (ולכן אין צורך בסימון התחתית).

א"ב הקלט הוא $\{x, y, z\}$, א"ב המחסנית הוא $\{A\}$. לאוטומט שמונה מצבים:

q_0 – מצב התחלתי בו נמצא האוטומט לפני קריאת רצף yx תורן.

q_1 – אחרי קריאת y ברצף yx .

q_2 – נקראו אותיות z במספר אי זוגי.

q_3 – נקראו אותיות z במספר זוגי וגדול מ-0.

q_4 – אחרי קריאת x ברצף xy .

q_5 – אחרי קריאת y ברצף xy .

q_6 – מצב מקבל. אחרי קריאת רצף xy , כאשר מספר הרצפים xy גדול ממש ממספר הרצפים yx .

q_7 – אחרי קריאת x ברצף xy כאשר מספר הרצפים xy שנקראו קודם גדול ממש ממספר הרצפים yx .

המעברים:

$(q_0, y, \perp, q_1, \varepsilon)$ קריאת y ברצף yx ראשון –

(q_1, x, \perp, q_0, A) קריאת x ברצף yx ראשון –

(q_0, y, A, q_1, A) קריאת y ברצף yx שני ויותר –

$(q_{1,x,A}, q_{0,AA})$	קריאת x ברצף yx שני ויותר –
$(q_{0,z,\perp}, q_{2,\varepsilon})$	קריאת z ראשונה, כשלפניה לא נקרא אף רצף yx ($n=0$) –
$(q_{0,z,A}, q_{2,A})$	קריאת z ראשונה, כשלפניה נקרא לפחות רצף yx אחד ($n>0$) –
$(q_{2,z,\perp}, q_{3,\varepsilon})$	קריאת z זוגית, שניה ויותר, כשבתחילת המילה לא היו רצפי yx ($n=0$) –
$(q_{2,z,\perp}, q_{3,A})$	קריאת z זוגית, שניה ויותר, כשבתחילת המילה נקרא לפחות רצף yx אחד ($n>0$) –
$(q_{3,z,\perp}, q_{2,\varepsilon})$	קריאת z אי זוגית, שלישית ויותר, כשבתחילת המילה לא היו רצפי yx ($n=0$) –
$(q_{3,z,A}, q_{2,A})$	קריאת z אי זוגית, שלישית ויותר, כשבתחילת המילה נקרא לפחות רצף yx אחד ($n>0$) –
$(q_{0,x,\perp}, q_{4,\varepsilon})$	קריאת x ברצף xy ראשון, כשלפני כן לא היו רצפי yx ($n=0$) ואותיות z ($k=0$) –
$(q_{0,x,A}, q_{4,A})$	קריאת x ברצף xy ראשון, כשלפני כן נקרא לפחות רצף yx אחד, ($n>0$) ולא נקראו אותיות z ($k=0$) –
$(q_{3,x,\perp}, q_{4,\varepsilon})$	קריאת x ברצף xy ראשון, כשלפני כן לא היו רצפי yx ($n=0$), ונקרא מספר זוגי וגדול מ-0 של אותיות z ($k>0$) –
$(q_{3,x,A}, q_{4,A})$	קריאת x ברצף xy ראשון, כשלפני כן נקרא לפחות רצף yx אחד ($n>0$), ונקרא מספר זוגי וגדול מ-0 של אותיות z ($k>0$) –
$(q_{4,y,\perp}, q_{6,\varepsilon})$	קריאת y ברצף xy , מיד אחרי התרוקנות המחסנית –
$(q_{4,y,A}, q_{5,\varepsilon})$	קריאת y ברצף xy , לפני התרוקנות המחסנית –
$(q_{5,x,\perp}, q_{4,\varepsilon})$	קריאת x ברצף xy שני ויותר, מיד אחרי התרוקנות המחסנית –
$(q_{5,x,A}, q_{4,A})$	קריאת x ברצף xy שני ויותר, לפני התרוקנות המחסנית –
$(q_{6,y,\perp}, q_{7,\varepsilon})$	קריאת y ברצף xy , אחרי שהמחסנית כבר התרוקנה –
$(q_{7,x,\perp}, q_{6,\varepsilon})$	קריאת x ברצף xy , אחרי שהמחסנית כבר התרוקנה –

שאלה 9 (אתי מנשה)

בנה אוטומט מחסנית המקבל את השפה L מעל הא"ב $\{0,1,2\}$, המכילה את כל המילים שניתן לחלקן לשלושה חלקים: החלק הראשון מורכב ממספר זוגי של אותיות 0, בחלק השני רצף של אותיות 1 הארוך מרצף האותיות 0 שבחלק הראשון, ובחלק השלישי מספר אי זוגי של אותיות 1 ו-2 (בספירה כוללת).

פתרון

ניתן לתאר את L באופן הבא:

$$\{0^n 1^m w \mid n \geq 0, \text{ זוגי } n, m > n\}$$

מספר האותיות 1 ב- w + מספר האותיות 2 ב- w הוא ערך אי זוגי.

האוטומט יעבוד עפ"י האלגוריתם הבא: כל עוד נקראות אותיות 0 ידחוף אותיות למחסנית, תוך מעקב אחר זוגיות מספר האותיות 0. עם קריאת אותיות 1 יתחיל לרוקן את המחסנית. אחרי שהמחסנית התרוקנה, וכל עוד נקראות רק אותיות 1 הוא יחליט באופן אי-דטרמיניסטי אם הוא עדיין בחלק 1^m או בחלק השלישי w . ברגע שנקראת אות 0 או אות 2 ברור שכבר עבר לחלק השלישי w . בכל מקרה, בקוראו את החלק השלישי יעקוב אחר זוגיות מספר האותיות 0 והאותיות 1, ללא שימוש במחסנית.

א"ב הקלט הוא $\{0,1,2\}$. א"ב המחסנית הוא $\{A\}$. לאוטומט שישה מצבים:

q_0 – מצב התחלתי המציין גם כי נקרא מספר זוגי של אותיות 0.

q_1 – נקרא מספר אי זוגי של אותיות 0.

q_2 – נקראו אותיות 1 במספר קטן או שווה למספר האותיות 0 שנקראו לפניו, ומספר האותיות 0 שנקראו זוגי.

q_3 – נקרא מספר זוגי של אותיות 0, ואח"כ מספר גדול מזה של אותיות 1, והאוטומט עדיין קורא את חלקה השני של המילה.

q_4 – נקרא מספר זוגי של אותיות 0 ואח"כ מספר גדול מזה של אותיות 1 ובחלק השלישי נקרא מספר אי זוגי של אותיות 1 ואותיות 2.

q_5 – נקרא מספר זוגי של אותיות 0, ואח"כ מספר גדול מזה של אותיות 1, ובחלק השלישי נקרא מספר זוגי של אותיות 1 ואותיות 2.

המצב המקבל הוא q_4 .

המעברים:

$(q_0, 0, \perp, q_1, A)$ – קריאת אות 0 ראשונה –

$(q_1, 0, A, q_0, AA)$ – קריאת אות 0 זוגית, שניה ויותר –

$(q_0, 0, A, q_1, AA)$ – קריאת אות 0 אי זוגית, שלישית ויותר –

$(q_0, 1, \perp, q_3, \varepsilon)$ – קריאת אות 1 ראשונה, כשלפניה לא נקראו אותיות 0 –

$(q_0, 1, A, q_2, \varepsilon)$ – קריאת אות 1 ראשונה, כשלפניה נקרא מספר זוגי וגדול מ-0 של אותיות 0 –

$(q_2, 1, A, q_2, \varepsilon)$ – קריאת אות 1, שניה ויותר, לפני התרוקנות המחסנית –

$(q_2, 1, \perp, q_3, \varepsilon)$ – קריאת אות 1, שניה ויותר, מייד אחרי התרוקנות המחסנית –

$(q_3, 1, \perp, q_3, \varepsilon)$ – קריאת אות 1 בחלק השני של המילה, אחרי התרוקנות המחסנית –

$(q_3, 1, \perp, q_4, \varepsilon)$ – ניחוש כי האות 1 הבאה פותחת את החלק השלישי של המילה –

$(q_3, 0, \perp, q_5, \varepsilon)$ – קריאת אות 0 הפותחת את החלק השלישי של המילה –

$(q_3, 2, \perp, q_4, \varepsilon)$ – קריאת אות 2 הפותחת את החלק השלישי של המילה –

$(q_4, 0, \perp, q_4, \varepsilon)$ – קריאת אות 0 בחלקה השלישי של המילה, כאשר מספר האותיות 2 ו-1 שנקראו אי זוגי –

$(q_4, 1, \perp, q_5, \varepsilon)$ – קריאת אות 1 בחלקה השלישי של המילה, כאשר מספר האותיות 1 ו-2 שנקראו

אי זוגי –

$(q_4, 2, \perp, q_5, \varepsilon)$ קריאת אות 2 בחלקה השלישי של המילה, כאשר מספר האותיות 1 ו-2 שנקראו

אי זוגי –

$(q_5, 0, \perp, q_5, \varepsilon)$ קריאת אות 0 בחלקה השלישי של המילה, כאשר מספר האותיות 1 ו-2 שנקראו

זוגי –

$(q_5, 1, \perp, q_4, \varepsilon)$ קריאת אות 1 בחלקה השלישי של המילה, כאשר מספר האותיות 1 ו-2 שנקראו

זוגי –

$(q_5, 2, \perp, q_4, \varepsilon)$ קריאת אות 2 בחלקה השלישי של המילה, כאשר מספר האותיות 1 ו-2 שנקראו

זוגי –

שאלה 10 (דגנית מורן)

בנה אוטומט מחסנית המקבל את השפה L מעל הא"ב $\{a, b\}$:

$$L = \{a^n b^k \mid k = n \text{ div } 2, n, k \geq 0\}$$

פתרון

האוטומט יעבוד עפ"י האלגוריתם הבא:

על כל אות a שניה שנקראת הוא יכניס אות למחסנית (תוך סימון התחתית). אם מספר האותיות a שנקראו (שנסמנו ב-n) זוגי, יוכנסו למחסנית בדיוק n/2 אותיות. אם n אי זוגי יוכנסו למחסנית (n-1)/2. אם כך, בכל מקרה יוכנסו למחסנית n div 2 אותיות. לכן עם כל אות b שנקראת תישלף אות מהמחסנית ועם התרוקנותה יעבור האוטומט למצב מקבל. א"ב הקלט הוא כמוכן $\{a, b\}$. א"ב המחסנית הוא $\{S, A\}$. לאוטומט חמישה מצבים.

q_0 – מצב התחלתי ומצב מקבל.

q_1 – זוכר כי נקרא עד כה מספר אי זוגי של אותיות a.

q_2 – זוכר כי נקרא עד כה מספר זוגי של אותיות a.

q_3 – זוכר כי נקראו אותיות b שמספרן קטן מ-n div 2, כאשר n הוא מספר האותיות a שנקראו לפניו.

q_4 – זוכר כי נקראו אותיות b שמספרן שווה ל-n div 2, כאשר n הוא מספר האותיות a שנקראו לפניו.

גם זהו מצב מקבל.

אלו המעברים:

$(q_0, a, \perp, q_1, \varepsilon)$ קריאת a ראשונה –

(q_1, a, \perp, q_2, S) קריאת a שניה –

(q_2, a, S, q_1, S) קריאת a שלישית –

(q_1, a, S, q_2, SA) קריאת a רביעית –

(q_2, a, A, q_1, AA) קריאת a אי זוגית, חמישית ויותר –

(q_1, a, A, q_2, AA) קריאת a זוגית, שישית ויותר –

- ($q_1, b, S, q_4, \varepsilon$) קריאת b ראשונה, כשלפניה נקראה אות a אחת –
- ($q_1, b, A, q_3, \varepsilon$) קריאת b ראשונה, כשלפניה נקרא מספר אי זוגי וגדול מ-1 של אותיות a –
- ($q_2, b, S, q_4, \varepsilon$) קריאת b ראשונה, כשלפניה נקראו 2 אותיות a –
- ($q_2, b, A, q_4, \varepsilon$) קריאת b ראשונה, כשלפניה נקרא זוגי וגדול מ-2 של אותיות a –
- ($q_3, b, A, q_3, \varepsilon$) קריאת b שניה ויותר, כאשר לפניה נקראו n אותיות a , ומספר האותיות b שנקראו קטן מ- $n \text{div} 2$ –
- ($q_3, b, S, q_4, \varepsilon$) קריאת b שניה ויותר, כאשר לפניה נקראו n אותיות a , ומספר האותיות b שנקראו הוא $n \text{div} 2$ –