

פרק 5 יעילות

1. הזמן הנדרש

8 שעות.

2. מטרות

1. הבנת המושג 'יעילות' וחשיבותו, הכרת הדרך הכללית לחישוב יעילות.
2. הכרת המדד של פונקציית זמן ריצה.
3. הבנת החשיבות שבחישוב פונקציית זמן הריצה של אלגוריתם, תוך שימת דגש על העובדה שישנן בעיות שגם מחשבים מהירים מאוד לא יפתרו בזמן סביר.
4. הכרת המושגים 'אורך קלטי', 'פעולת יסודי' ו'צעד בסיסי'.
5. הבנה שמדד טוב לפונקציית זמן ריצה הוא מספר הפעמים שאלגוריתם מבצע צעד בסיסי כתלות באורך הקלט.
6. הבנת ההבדל בין שיפור בקבוע לבין שיפור בסדר גודל.
7. השימוש ב'מקרה הגרוע ביותר' כמדד המשמעותי להערכת פונקציית זמן הריצה של אלגוריתם.
8. הכרת המושג 'סדר גודל' (O גדול). הכרת משפחות של סדרי גודל: לוגריתמי, לינארי, ריבועי ומעריכי.

3. מבנה הפרק

מומלץ לברר מה למדה הכיתה על נושא היעילות. ייתכן וחלק מהמושגים כבר נלמדו ואז יש צורך בחזרה ולא בלמידה מההתחלה.

א – בעיות, פתרונות ויעילות

מומלץ לפתוח את הדיון בבעיית יעילות שאינה קשורה לעולם המחשבים, ורק לאחר מכן לעבור לדוגמאות ממדעי המחשב. דוגמה לבעיה הדנה ביעילות ואינה לקוחה מעולם מדעי המחשב:

על מחלקת ההפצה במפעל קרמבו מוטל לארוז את הסחורה ולהכינה להפצה. על כל אריזה מודפס שם הלקוח, כתובתו וכמות הקרמבו בחבילה. בסוף כל חודש מר ורסאנו, מנהל מחלקת ההפצה, מקבל את האריזות ומחלק אותן בין הלקוחות השונים בעיר. הבעיה: מר ורסאנו משתכר שכר קבוע עבור החלוקה כולה, ולכן ירצה לסיים את המשימה בזמן הקצר ביותר. מצא דרך יעילה לפתרון הבעיה.

בתחילת הדיון יש לבקש מהתלמידים להציע פתרונות לבעיה. מר ורסאנו יכול להשתמש בעזרים נוספים (קטנוע, משאית, פועלים נוספים וכו'), אולם כל אחד מעזרים אלה תורם ליעילות במישור מסוים וגורע במישור אחר (לדוגמה: קטנוע מקצר את הזמן בפקקים, אולם יכולת הנשיאה שלו מוגבלת ולכן צריך לנסוע הלוך וחזור למפעל, דבר שמגדיל את צריכת הדלק וגוזל זמן רב). לאחר מכן יש לבקש מהתלמידים להשוות בין הפתרונות השונים, ולהציע מדדים שונים לבחינת היעילות של הפתרונות. המדדים השונים יצביעו כמובן, על פתרונות שונים כיעילים, וזו הנקודה החשובה. יש להדגיש כי קיימים כמה פתרונות יעילים, השאלה היא מהו המדד שלפיו אנו בוחנים את הפתרון. במקרה כמו זה המופיע בדוגמה לעיל, קשה מאוד להכריע מהו הפתרון הטוב והיעיל ביותר, מכיוון שמדדי היעילות בבעיה אינם מוגדרים בצורה ברורה. לאחר מכן ניתן לפתח דיון על החשיבות של מדידת יעילות ומשך זמן הריצה בעולם המחשבים, תוך התייחסות לבעיה שאין לה פתרון סביר, למשל, דוגמת הסוכן הנוסע המופיעה בספר.

תשובות לשאלות המחשבה המופיעות בסעיף זה:

? נסו למצוא שיטה אלגוריתמית לפתרון בעיה עבור כל רשימה נתונה של אתרים ומרחקים.

תשובה:

אין כאן תשובה חד-משמעית והשאלה נועדה לעורר דיון בנושא.

ב – איך מודדים יעילות

בסעיף זה נלמדת הדרך הטכנית המדויקת לחישוב פונקציית זמן ריצה:

- א. יש להגדיר בדיוק כיצד מגדירים את אורך הקלט.
- ב. יש לחשב את מספר פעולות היסוד המתבצעות עבור אורך קלט זה.
- ג. ולבסוף, יש לסכם: מספר הפעולות למקרה הגרוע – זאת פונקציית זמן הריצה.

כאשר סופרים את מספר פעולות היסוד אין צורך להתעקש על דיוק. אם התלמידים סופרים את ההשמה יחד עם פעולת חשבון שמתבצעת באותה שורה – ניתן לקבל זאת. למשל התלמידים עשויים לספור את הפקודה הבאה כפעולת יסוד אחת:

`int a = k+1;`

גם פעולות הצבה הכוללות חישובים נוספים (חישוב מספר אקראי, פנייה למערך וכד') ומסתיימות בסימן ; (נקודה-פסיק) ייחשבו כפעולת יסוד אחת.

ככלל, ניתן להנחות את התלמידים שכל שורת הוראות המסתיימת בנקודה-פסיק ניתנת לספירה כפעולת יסוד אחת.

הרעיון שהתלמידים יגלו הוא שחשוב לברר את סדר הגודל של יעילות הפעולה, ולכן הדיוק במספר פעולות היסוד הוא זניח.

המוטיבציה לבצע חיפושים במערך :

אף שבעיה זו ידועה לתלמידים, כדאי לשאול אותם מדוע אנו רוצים לחפש מספר כלשהו במערך? האם הם יכולים לחשוב על יישום כלשהו שבו החיפוש הזה יהיה יעיל. התשובה היא שבדרך כלל לא יהיו מאוחסנים במערך מספרים בלבד. נחשוב על מצב של מערך שבו מאוחסנים עצמים, שלכל אחד מהם יש שדה מספרי המשמש כמפתח לחיפוש. לדוגמה, במשרד הפנים, כל עצם מייצג אדם (אזרח או תושב) והמספר הוא מספר תעודת הזהות. חיפוש של מספר נתון יאפשר למצוא את העצם המכיל את נתוני אותו אדם. הבעיה שהצגנו היא "מודל" של בעיה זו, המתרכז רק בחלק שמעניין אותנו – החיפוש – ומתעלם משאר הפרטים שאינם חשובים לנושא החיפוש.

תשובות לשאלות המחשבה המופיעות בסעיף זה :

? אפשר להגדיר גם את זמן הריצה במקרה הטוב ביותר. האם זהו מדד טוב ליעילות?

תשובה :

זה אינו מדד טוב ליעילות, כיוון שהוא אינו משקף נכונה את זמן ריצת האלגוריתם ברוב הגדול של המקרים.

ג – שיפור יעילות של אלגוריתם

- התלמידים שלא השתכנעו עדיין שאין צורך בספירה מדויקת של פעולות היסוד, ישתכנעו בכך בסעיף זה.

- **חיפוש בינרי :**

חיפוש זה תקף רק במערכים ממוינים. אין טענה שהחיפוש הבינרי משפר אפילו במשהו את היעילות של חיפוש על מערך שאינו ממוין. אם כך צריכים התלמידים להבין שקודם לחיפוש במערך, צריך למיין אותו (וזו היא פעולה יקרה). החיפוש הבינרי יעיל הרבה יותר מחיפוש סדרתי במערך שהוא כבר ממוין. שימו לב שבתחילת הפרק בדוגמה 1 התעלמנו בכוונה מכך שהמערך ממוין.

ניזכר במוטיבציה שהצענו לבעיית החיפוש: מאגר הנתונים של משרד הפנים. אם בכל יום מתבצעים במאגר מאות חיפושים, משתלם להשקיע פעם ביום במיין המאגר, שכן על ידי כך נוכל להוריד משמעותית את מחיר החיפושים. עד לביצוע היומי של מיין ומיזוג, יישמרו השינויים בקובץ נוסף במשרד הפנים. על קובץ זה ניתן לבצע בנפרד חיפוש קצר במידת הצורך.

את החיפוש הבינרי בפרק אנו מציגים כפעולה איטרטיבית, כיוון שהיא פשוטה ואינטואיטיבית.

- אם הכיתה טרם למדה את נושא הלוגריתמים במסגרת לימודי המתמטיקה, תתעורר בעיה בהצגת סיבוכיות לוגריתמית. יש לתאם בתחילת השנה עם המורה למתמטיקה את זמן הוראת הנושא באופן מוקדם ככל שניתן. בכל מקרה, כדאי לחזור בכיתה על נושא הלוגריתמים. ניתן להיעזר במצגות הנמצאות בכתובת: www.g-math.co.il

תשובות לשאלות המחשבה המופיעות בסעיף זה:

? האם יש שינוי בחישוב היעילות עבור המקרה הגרוע ביותר, בשל העובדה שהמערך ממוין?

תשובה:

אין שינוי, כיוון שאם הערך שמחפשים נמצא בתא האחרון במערך, הסריקה תתבצע על המערך כולו (זהו המקרה הגרוע ביותר).

ד – הערכה כללית של יעילות – סדר גודל

• **מיון מיזוג:**

בסעיף הזה מנוסח האלגוריתם "מיון מיזוג" באופן רקורסיבי, אך למעשה קל יותר לממשו כאלגוריתם איטרטיבי. המפתח להבנת הרעיון הוא זה: באלגוריתם אין צורך לטרוח בחלוקת קטעים לשניים. הרי אנו יודעים שהחלוקה יהיה בידינו אוסף של זוגות של קטעים סמוכים באורך 1 כל אחד. אם כך, הבה נתחיל במיזוג של זוגות קטעים כאלה. במעבר הראשון על המערך, נמזג זוגות תאים סמוכים, ונקבל קטעים ממוינים באורך 2. במעבר השני, נמזג זוגות קטעים סמוכים באורך 2, ונקבל קטעים ממוינים באורך 4. במעבר ה-k נמזג זוגות קטעים סמוכים שאורכם 2^k , ונקבל קטעים באורך 2^{k+1} . התהליך ייפסק כאשר נקבל קטע ממוין שהוא המערך כולו (כמובן, כיוון שאורך מערך בדרך כלל אינו בדיוק חזקה של 2, יהיה צורך בטיפול מיוחד ב"זנב" של המערך, שבו יכול להיות קטע אחד שאורכו אינו זהה לאלה של כל הקטעים הקודמים).

תשובות לשאלות המחשבה המופיעות בסעיף זה:

? א. האם הפונקציה $f(n) = n^2$ היא מסדר גודל לינארי?

ב. האם הפונקציות $f(n) = n^2 / 100$, $g(n) = n^2 / 10$ הן מאותו סדר גודל?

תשובה:

א. לא, היא מסדר גודל ריבועי.

ב. כן, כי ההפרש ביניהן הוא רק הכפלה בקבוע.

ה – פונקציית זמן ריצה מעריכית

חשוב להדגיש, בעזרת דוגמאות מספריות של זמני ריצה, כי אלגוריתמים שזו יעילותם אמנם ניתנים למימוש על מחשב, אך זמן ריצתם אינו סביר.

ו – משפחות של סדרי גודל - סיכום

חשוב לתרגל את היחס בין סדרי הגודל (למשל על ידי התרגילים 2–4).

4. תרגילים

פתרונות לכל התרגילים מופיעים באתר המרכז להוראת המדעים, האוניברסיטה העברית בירושלים, ונגישים רק לציבור המורים:

http://sites.huji.ac.il/science/unit4_2007/

שאלה 1

ספירת הפעולות הבסיסיות של הפעולה.
אין להתעקש על מספר מדויק. מותר לספור שורה המסתיימת בנקודה-פסיק כפעולת יסוד אחת. מומלץ לפתור את סעיפים א, ג בכיתה ולתת את הסעיפים ב, ד כשיעורי בית. חשוב לשים לב כי אף שבסעיפים ג ו-ד ישנה לולאה כפולה, אלה בעצם פעולות לינאריות באורך הקלט.

שאלות 2–4

מיון של פונקציות זמן ריצה.
מומלץ לפתור חלק מהסעיפים של שלוש השאלות בכיתה וחלק לתת כשיעורי בית.

שאלה 5

ספירת פעולות יסוד של פעולה.
התרגיל דומה לתרגיל הראשון אך הוא מתרגל אספקטים נוספים: מספר פעולות קבוע ואופן קידום שונה של i.
מומלץ לפתור בכיתה את קטעי הקוד 6–8 כדי להראות את מורכבות הניתוח. מומלץ לתת את יתר התרגילים כשיעורי בית, ולדון בפתרון בכיתה.

שאלה 6

השאלה מדגישה את החשיבות של אורך הקלט במדידת סדר גודל נתון. כלומר לא כל פעם שסדר גודל יעיל יותר מאחר, הוא עדיף (עבור קלטים קטנים יותר יש פעמים שבהן עדיף האלגוריתם שסדר הגודל שלו פחות טוב).
מומלץ לפתור בכיתה.

שאלה 7

הפעולה מתרגלת צעד בסיסי וספירת פעולות יסוד.
ניתן לתת כשיעורי בית ולעבור עליו בכיתה.

שאלה 8

השאלה מדגישה את חשיבות ההגדרה של אורך הקלט.
מומלץ לעשות בכיתה.

שאלה 9

כתיבת פעולה וניתוח יעילותה.
מומלץ להתחיל לפתור בכיתה ולהמשיך כשיעורי בית.

שאלה 10

ניתוח יעילות של פעולה הקוראת לפעולה אחרת.
מומלץ לפתור בכיתה.

שאלה 11

ניתוח יעילות של מיון בחירה.
אפשר לתת כשיעורי בית.

שאלה 12

ניסיון לשפר אלגוריתם קיים (מיון בועות).
אפשר לתת כשיעורי בית ולדון בכיתה בפתרונות.

שאלה 13

שיפור יעילותו של אלגוריתם (בדיקה האם מספר הוא ראשוני).
מומלץ לפתור בכיתה.

שאלות 14–15

כתיבת פעולות לפי סדר גודל נתון.
מומלץ לפתור שאלה אחת בכיתה ולתת אחת כשיעורי בית.

שאלה 16

ניתוח פעולה נתונה ושיפור יעילותה.
מומלץ לפתור בכיתה.

שאלה 17

כתיבת פעולה בעלת יעילות נתונה.
מומלץ לתת כשאלת חשיבה בבית ולפתור אחר כך בכיתה.

שאלה 18

מדידה בפועל של זמני ריצה של אלגוריתמים.
מומלץ לפתור בכיתה. ניתן לתת לתלמידים קוד חלקי להשלמה.

שאלה 19

כתיבת האלגוריתם של אוקלידס.
בפרק 4 – רקורסיה, הוצג פתרון רקורסיבי של המשימה. באתר הפתרונות לפרק זה מוצג פתרון איטרטיבי.
תרגיל רשות.

שאלה 20

ניתוח יעילות של פעולה נתונה.
אפשר לתת כשיעורי בית.