

תבנית להוכחת אי-רגולריות

מטרה: נתונה שפה L ומבקשים להוכיח כי L אינה רגולרית.

נתונה שפה L , נוכיח כי השפה L אינה רגולרית.

דרך ההוכחה: על דרך השלילה.

שלבי ההוכחה:

1. **נניח בשלילה** כי השפה L היא שפה רגולרית. מאחר ו- L היא שפה רגולרית אזי קיים אוטומט סופי דטרמיניסטי A המקבל אותה.
2. **נגדיר** קבוצת מילים אינסופית שנשמנה ב- W . קבוצת מילים זו היר הרישא (התחלה) של קבוצת מילים המוכלת ב- L . נראה כי עבור כל מילה ב- W (שהיא תת מילה של מילה ב- L האוטומט A מגיע למצב שונה).
 - 2.1 יש למצוא קבוצה אינסופית של מילים W , כך ש- W היא רישא של L או ש- W רישא של קבוצה חלקית של L .
 - 2.2 טענה: לכל מילה בקבוצה W האוטומט A מגיע למצב שונה.
נוכיח בדרך השלילה:
 - 2.2.1 נניח שקיימות שתי מילים שונות w_1 ו- w_2 שעבורן האוטומט מגיע למצב זהה q .
 - 2.2.2 נמצא מילה w כך שהמילה $w_1 \bullet w$ שייכת ל- L אבל המילה $w_2 \bullet w$ לא שייכת ל- L .
 - 2.2.3 מאחר והמילה $w_1 \bullet w$ שייכת ל- L אז המעבר על המילה $w_1 \bullet w$ מגיע למצב מקבל. ומאחר ועבור w_1 ו- w_2 האוטומט A מגיע למצב זהה q אז גם מעבר על המילה $w_2 \bullet w$ מגיע למצב מקבל וזה בניגוד לכך שהיא אינה בשפה.
 - 2.2.4 לכן ההנחה שקיימות שתי מילים עבורן האוטומט A מגיע לאותו מצב היא שגויה.
3. מאחר ועבור כל תת מילה ב- W האוטומט A מגיע למצב אחר והקבוצה היא אינסופית אז גם קבוצת המצבים הזו היא אינסופית וזאת בסתירה לכך שהאוטומט הוא אוטומט סופי. לכן ההנחה כי קיים אוטומט סופי דטרמיניסטי A המקבל את השפה L היא שגויה ולכן L אינה שפה רגולרית.

דוגמא:

יש להוכיח כי השפה $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ אינה רגולרית.

הוכחה:

1. נניח בשלילה כי השפה L היא שפה רגולרית. ולכן קיים אוטומט סופי דטרמיניסטי A המקבל אותה.
2. נגדיר קבוצת תת-מילים שהן התחלות של מילים בשפה: $W = \{\varepsilon, a, a^2, a^3, \dots\}$. קבוצה זו היא קבוצה אינסופית עבור כל m וניתנות לרישום כ- $W = \{a^m \mid m \geq 0\}$.
 - 2.1 נבחר שתי מילים כלליות כלשהן מתוך W שהן התחלות של מילים מהשפה L למשל: $w_j = a^j$ ו- $w_i = a^i$ כך ש- $i \neq j$.
 - 2.2 מאחר והאוטומט סופי חייבות להיות מילים שהתחלות שלהן מגיעות לאותו מצב. אחרת כל תת מילה תיצור מסלול חדש באוטומט ומאחר והשפה אינסופית גם האוטומט יהיה אינסופי. מכיוון שהמילים שבחרנו הן כלליות, ניתן להניח כי הן מגיעות למצב qt .
 - 2.3 קיבלנו מסלול מ- q_0 ל- qt עבור תת המילה w_i ומסלול מ- q_0 ל- qt עבור תת המילה w_j .
 - 2.4 מאחר והמילה $w = a^i b^i$ שייכת לשפה יש מעבר מ- qt ל- qr (מצב מקבל).
 - 2.5 מכאן מתקבל מסלול מקבל מ- q_0 ל- qr עבור המילה $w = a^j b^i$ וזה בניגוד לכללי השפה.
3. קיבלנו תוצאה שגויה ההנחה שיש בשפה שתי מילים המגיעות לאותו מצב היא הנחה שגויה. ולכן כל מילה מגיעה למצב אחר. מאחר ובשפה יש אינסוף מילים נדרשים אינסוף מצבים וזוהי סתירה להגדרת אוטומט סופי. לכן לא קיים אוטומט סופי המקבל את השפה L ומכאן השפה היא אי-רגולרית.