פתרון בעיות מילוליות באמצעות תכנית מחשב.

כדי לא לכוון את התלמידים לפתירת שאלות בדרך סגורה ומובנית, מציגים לפני הפתרון האלגוריתמי פתרונות, כגון פתרון על-ידי ניסוי וטעייה ופתרון פורמלי. לתלמידים קשה מאוד לעבור מפתרון על-ידי ניסוי וטעייה לפתרון פורמלי וכללי.

חידה:

בסרט "מת לחיות 3" נדרשים השוטר ג'ון מקליין והסוחר זוס קארבר, שהצטרף בעל כורחו אל מקליין, לפתור בזריזות את החידה.

...על המזרקה נמצאים שני מכלים ריקים בעלי קיבולת של 5 ו-3 ליטרים בדיוק.

השוטרים צריכים למדוד באמצעותם בדיוק ארבעה ליטרים של מים. במלים אחרות, למלא אחד מהמכלים בארבעה ליטרים. מעט מים, יותר או פחות, יביא לפיצוץ..."

הפעולות המותרות לפתרון החידה הן:

- מילוי מכל במים
- ריקון מכל
- העברת מים ממיכל אחד לשני כך שמיכל השני מתמלא או המיכל הראשון מתרוקן

שלב ראשון

ב**דרך ניסוי וטעייה** מקבלים פתרון, ובודקים את נכונות הפתרון על-ידי המעקב. בשלב זה התלמידים מתבקשים לכתוב את האלגוריתם המילולי לפתרון החידה לבדוק את נכונות האלגוריתם באמצעות מעקב.

✓ עליכם לכתוב את סידרת ההוראות הנתונה לפתרון הבעיה ולבדוק.

הפתרון:

הפעולות המותרות	**המֵכל בעל הקיבולת 3**	**המֵכל בעל הקיבולת 5**
	0	0
מלא את מֵכל 3	3	0
העבר ממֵכל 3 למֵכל 5	0	3
מלא את מֵכל 3	3	3
העבר ממֵכל 3 למֵכל 5	1	5
רוקן את מֵכל 5	1	0
העבר ממֵכל 3 למֵכל 5	0	1
מלא את מֵכל 3	3	1
העבר ממֵכל 3 למֵכל 5	0	4

נשאלות השאלות:

- האם קיים פתרון כללי לבעיה ולבעיות דומות?
- האם ישנן בעיות דומות שלא ניתנות לפתרון?
- איך אפשר לפתור בעיות מילוליות באמצעות מחשב?
- איך אפשר לייצג את הבעיה בצורה פורמלית, ניתנת לפתרון במחשב.

לדוגמה לשאלה:
האם ניתן למדוד בדיוק ארבעה ליטרים באמצעות שני מיכלים - אחד בעל קיבולת של 3 והשני בעל קיבולת של 6. ואם כל ניסיונות כושלים?

האפשרות השנייה היא למצאו דרך הפורמלית לפתירת החידה.

רדוקציה היא שיטה אלגוריתמית המאפשרת להמיר בעיה אלגוריתמית נתונה לבעיה אחרת שבעזרתה ניתן לפתור את הבעיה המקורית.
אפשר להמיר חידת מילים פתרון משוואה לינארית עם שני נעלמים על-ידי שימוש בגרף.

אלגוריתם למדידת 4 ליטרים באמצעות שני מיכלים בעלי קיבולת של 5 ו-3 ליטרים	אלגוריתם לפתרון המשוואה הדיופנטית: $5x + 3y = 4$
קלט: קיבולת של שני מכלים ריקים 5 ו-3 ליטרים, כמות מים שצריך למדוד – 4 ליטרים וכמות מים בלתי מוגבלת.	**קלט**: שני מקדמי הנעלמים 5 ו-3 והמקדם החופשי 4 של המשוואה.
פלט: אלגוריתם לפתרון החידה – סדרה סופית של הפעולות המותרות שמובילה למטרה – 4 ליתרים.	**פלט**: שני המספרים השלמים -1 ו-3 . הצבת המספריים במקום שני הנעלמים תניב את השוויון המבוקש: $5\cdot(-1) + 3\cdot3 = 4$

שלב תרגום הפלט:
2 – מספר הפעמים, שצריך לרוקן את המיכל **המלא במים** בעל קיבולת 5 ליטרים.
-3 – מספר הפעמים, שצריך למלא את **המיכל הריק** בעל קיבולת 3 ליטרים.

אילוצי התרגום:

- אפשר למלא את המיכל בעל קיבולת 3 ליטרים רק בתנאי שלא נותרו בו מים כלל. אם המיכל אינו ריק, צריך להעביר את המים למיכל שני במכה אחת או בשלבים, תוך כדי ריקון המיכל השני.
- אפשר לרוקן את המיכל השני בעל קיבולת 5 ליטרים רק בתנאי שהמיכל מלא במים. אם המיכל אינו מלא, צריך להעביר בו מים מהמיכל בעל קיבולת 3 ליטרים.

הפתרון האפשרי בשת פייטון:

```
def fill_or_empty(b):
    if b[1] == 0 and b[2] > 0:
        b[1] = b[0]
        b[2] -= 1
    elif b[1] == b[0] and b[2] < 0:
        b[1] = 0
        b[2] += 1
def pour_into(b_from, b_to):
    if b_from [1] == 0 and b_to[0] == b_to[1] :
        return
    free = b_to[0] - b_to[0]
    if b_from[1] > free:
        b_to[1] = b_to[0]
        b_from[1] -= free
    else:
        b_to[1] += b_from[1]
        b_from[1] = 0
def reduce (b1, b2):
    while b1[2] or b2[2] > 0:
        fill_or_empty(b1)
        fill_or_empty(b2)
        if b1[1] and b1[2] > 0 or b1[2] == 0 and b2[2] < 0:
            pour_into(b1, b2)
        if b2[1] and b2[2] > 0 or b2[2] == 0 and b1[2] < 0:
            pour_into(b2, b1)
    if b1[0] > b2[0] :
        pour_into(b1, b2)
    else:
        pour_into(b2, b1)
```

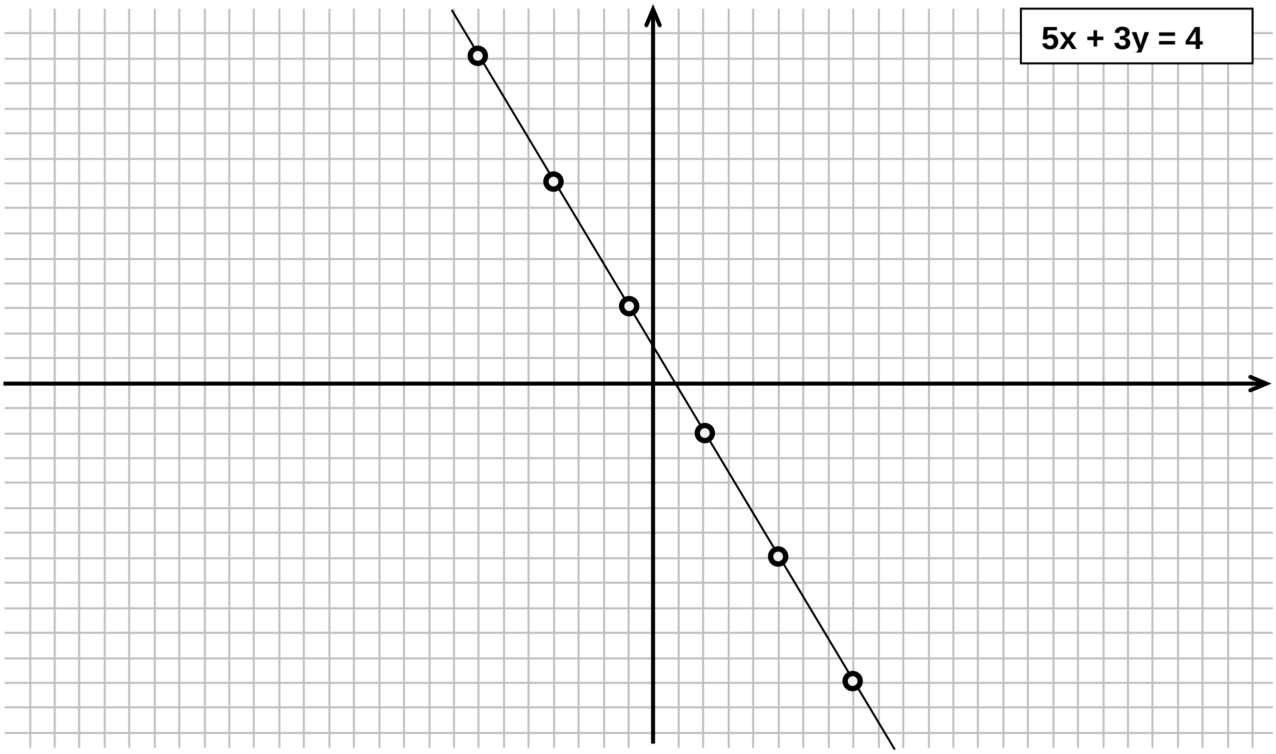
שלב שני

בשלב זה התלמידים מתבקשים לכתוב פעולה בשפת תכנות, שמאפשרת לתרגם פתרון המשוואה לפתרון החידה.

שלב שלישי

בשלב זה התלמידים מתבקשים לפתור את המשוואה בעזרת פעולה בשפת תכנות.

המורה צריך לכוון את התלמידים לפתרון פורמלי של משוואה.



- גרף של המשוואה הוא קו ישר.
- כל הנקודות עם קואורדינטות שלמות, שנמצאות על הישר, הן פתרונות למשוואה.
- מהציור אפשר לראות, כי בין הנקודות (1- , 3) ו-(4-, 8) אין נקודות שלמות נוספות בקטע שמחבר אותן.
- אפשר לעבור בין נקודות סמוכות ושלמות בעזרת הזזה קבועה לאורך הישר מספר פעמים.
- או ההזזה ההפוכה.
- כך אפשר לנוע על כל הפתרונות.

הפתרון האפשרי בשת פייטון:

```
def solution(a, b, c):
    x = 0
    while (c - a * x) % b:
        x -= 1
    return x, (c - a * x) // b
```

שלב רבעי – נכונות הפתרון

דיון בכיתה האם הפתרון נכון? האם תמיד קיימת פתרון למשוואה כללית?

אם למשוואה אין פתרון, נקבל לולאה אין סופית.

דוגמה למחשבה:

- האם קיים למשוואה 6x + 3y = 4?
- אפשר לראות מראש שהתשובה היא שלילית. למה?
- התשובה היא המספר שבאגף ימין לא מתחלק בשלוש, ולא משנה מה נציב בתור x, y באגף שמאל, נקבל שם מספר שמתחלק בשלוש.

בשלב זה התלמידים מתבקשים לתקן את פתרון המשוואה, כדי למנוע לולאה אין סופית.

בפתרון החדש צריך להשתמש בתכונה שגילינו בשלב הראשון. אם למשוואה יש פתרון אפשר לעבור בין פתרונות סמוכים בעזרת הזזה קבועה לאורך הישר.

הפתרון האפשרי בשת פייטון:

```
def solution(a, b, c):
    for x in range (0 -b - 1, -1):
        if (c - a * x) % b:
            return x, (c - a * x) // b
        x -= 1
    return ()
```